

ANALÍZIS I. TÉTELBIZONYÍTÁSOK ÍRÁSBELI VIZSGÁRA

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2012. július 2.



Ha hibát találsz, kérlek jelezd a info@baloghtamas.hu e-mail címen!



Ez a Mű a Creative Commons Nevezd meg! - Ne add el! - Így add tovább! 3.0 Unported Licenc feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

1. A Bernoulli-egyenlőtlenség és a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

Bernoulli-egyenlőtlenség:

Tétel:

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$

Ekkor: $(1+h)^n \geq 1+n \cdot h$ és " $=$ " $\Leftrightarrow n=1 \vee h=0$

Bizonyítás:

Teljes indukció(n -re):

1. $n=1$ -re $\wedge h \geq -1 \in \mathbb{R}$ -re $\Rightarrow (1+h)^1 \geq 1+1 \cdot h \Leftrightarrow 1+h \geq 1+h \quad \checkmark$

2. Indukciós feltevés: Tfh. valamely n -re igaz: $(1+h)^n \geq 1+n \cdot h$

3. Kell, hogy $n+1$ -re is igaz legyen: $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot h$

$$\text{Ugyanis } (1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \underset{\substack{1+h \geq 0 \\ \text{ind. felt. miatt}}}{\geq} (1+n \cdot h) \cdot (1+h) =$$

$$1 + nh + h + nh^2 =$$

$$= 1 + (n+1)h + nh^2 \underset{nh^2 \geq 0}{\geq} 1 + (n+1)h \quad \checkmark \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \text{-re igaz.}$$

Egyenlőség esete:

" \Leftarrow " Ha $h=0$ vagy $n=1$, akkor nyilván $(1+h)^n = 1+nh$

" \Rightarrow " Tegyük fel, hogy $(1+h)^n = 1+nh$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in [-1, +\infty)$ esetén.

Tegyük még fel azt is, hogy $n \geq 2$. Azt kell igazolnunk, hogy ekkor h csak 0-val lehet egyenlő.

Mivel $(1+h)^n = 1+nh \Leftrightarrow h((1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-2} + \dots + 1) = hn$, ezért $h > 0$ nem lehet, mert ekkor $(1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-2} + \dots + 1 > n$.

Viszont $h < 0$ sem lehet, mert ebben az esetben

$$0 \leq (1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-2} + \dots + 1 < n \quad \square.$$

Számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség:

Tétel:

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$

Ekkor $x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n$ és " $=$ " $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Bizonyítás:

Teljes indukció n -re és Bernoulli egyenlőtlenség:

1, $n=1 \Rightarrow 0 \leq x_1 \in \mathbb{R} : x_1 \leq \left(\frac{x_1}{1}\right)^1 = x_1 \quad \checkmark$

1b, $n=2 \Rightarrow 0 \leq x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{kell: } x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2 \quad \checkmark \text{ Sőt, itt } " $=$ " \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

2, Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ mellett $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az egyenlőtlenség: $x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n$

Jelölés: $P_n := x_1 x_2 \dots x_n$, $S_n = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ Ekkor: $P_n \leq S_n^n$

Kell: $n+1$ -re, azaz $\forall 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ számra: $P_{n+1} \leq S_{n+1}^{n+1}$

$$\text{Bizonyítása: } S_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n \cdot S_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n \cdot S_n + S_n - S_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$\left(S_n + \frac{x_{n+1} - S_n}{n+1}\right)^{n+1} \underset{S_n \neq 0}{=} S_n^{n+1} \left(1 + \frac{x_{n+1} - S_n}{(n+1) \cdot S_n}\right)^{n+1} \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} S_n^{n+1} \left(1 + (n+1) \frac{x_{n+1} - S_n}{(n+1) \cdot S_n}\right) =$$

$$S_n^{n+1} \left(1 + \frac{x_{n+1} - S_n}{S_n}\right) = S_n^{n+1} \frac{x_{n+1}}{S_n} = S_n^n x_{n+1} \underset{\text{ind feltevés miatt}}{\geq} P_n x_{n+1} = x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} =$$

P_{n+1}

Kell még: Ha $S_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

illetve $h = \frac{x_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n} \geq -1 \quad |/(n+1)S_n$

$x_{n+1} - S_n \geq -nS_n - S_n \Rightarrow x_{n+1} + nS_n \geq 0$ és ez igaz.

" = " bizonyítása: Ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ akkor a két oldal egyenlő ezért az állítása igaz. Tegyük most fel, hogy az x_k számok nem mind egyenlők egymással. Jelölje x_1 a legkisebb, x_2 pedig a legnagyobb számot az x_k számok között. Legyen továbbá:

$S_n := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Ekkor $x_1 < S_n < x_2$. Írjuk most x_1 helyébe S_n -et, x_2 helyébe pedig $(x_1 + x_2 - S_n)$ -et. Az így kapott

$$S_n, x_1 + x_2 - S_n, x_3, x_4, \dots, x_n$$

számok számtani közepe nyilván S_n , és a mértani közepükre az

$$S_n(x_1 + x_2 - S_n) - x_1x_2 = (S_n - x_1)(x_2 - S_n) > 0$$

miatt az

$$\sqrt[n]{S_n(x_1 + x_2 - S_n)x_3x_4 \dots x_n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3 \dots x_n}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ez azt jelenti, hogy a számtani közép változatlan maradt, a mértani közép pedig növekedett. Ha a

$$S_n, x_1 + x_2 - S_n, x_3, x_4, \dots, x_n$$

alatti számok nem mind egyenlők egymással, akkor folytatjuk az eljárást. Végül legfeljebb $n - 1$ lépésben mindegyik szám S_n lesz. A számtani közép nem változott, a mértani mindig nőtt, most egyenlőség lett, tehát eredetileg a mértani közép kisebb volt, mint a számtani közép \square .

2. A teljes indukció elve és a szuprémum elv.

Teljes indukció elve:

Tétel:

Legyen A_n egy állítás.

$\forall n \in \mathbb{N}$

Tfh.: A_0 igaz

Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz $n \in \mathbb{N}$

Ekkor A_n igaz $\forall n \in \mathbb{N}$ -re

Bizonyítás:

Legyen $S = \{n \in \mathbb{N} : A_n \text{ igaz}\} = S \subseteq \mathbb{N}$

S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, mert A_0 igaz, ha $n \in S$,

akkor $A(n)$ igaz $\Rightarrow A_{(n+1)}$ igaz $\Rightarrow n + 1 \in S \Rightarrow S$ induktív

\mathbb{N} a legkisebb induktív halmaz $\Rightarrow \mathbb{N} \subset S \Rightarrow S = \mathbb{N} \Rightarrow A_n$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. \square .

Szuprémum elv:

Tétel:

$\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb.

Bizonyítás:

$\emptyset \neq H = A, B := \{k \in \mathbb{R} : k \text{ felső korlátja } A\text{-nak}\} \Rightarrow \forall a \in A \quad \forall k \in B : a \leq k$

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, mert felülről korlátos \Rightarrow teljességi axióma alapján $\exists \xi \in \mathbb{R}$

$\forall a \in A, \forall k \in B : a \leq \xi \leq k \Rightarrow a \leq \xi \quad \forall a \in A\text{-ra} \Rightarrow \xi$ felső korlát, és ξ a legkisebb felső korlát, mert ha k felső korlát és $\xi \leq k \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát \square .

3. Az arkhimédészi tulajdonság.

Tétel:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : b < na$$

Bizonyítás:

Indirekt:

$$\text{Tfh. } \exists a \in \mathbb{R}, a > 0 : \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : b \geq na$$

$$H = \{na : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow H \text{ felülről korlátos, hiszen } na \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \xi = \sup H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi \text{ a legkisebb felső korlát} \Rightarrow \xi - a \text{ nem felső korlát} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : na > \xi - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)a > \xi \quad \nmid \text{ hiszen } (n+1)a \leq \xi \text{ mert } \xi \text{ felső korlátja a } H \text{ halmaznak.} \quad \square.$$

4. A Cantor tulajdonság.

Tétel:

Legyen $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum

Ha $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re, akkor $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

Bizonyítás:

Legyen $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor $a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$, hiszen:

$$- n \leq m : a_n \leq a_m \leq b_m$$

$$- n > m : a_n \leq b_n \leq b_m$$

Teljességi axióma miatt $\exists \xi \in \mathbb{R} : a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq \xi \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\xi \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \quad \square.$$

5. Sorozat határértékének egyértelmősége.

Tétel:

Az (a_n) sorozatnak \exists határértéke, ha $\exists A \in \bar{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : a_n \in K_\varepsilon(A)$

Az előző A szám az (a_n) sorozat határértéke, és ez a szám egyértelmű.

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük, fel, hogy A_1 és A_2 is kielégíti a definíciót.

$$\text{Legyen } \varepsilon \leq \frac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset$$

$$\lim a_n = A_1 \Rightarrow \varepsilon\text{-hoz } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A_1)$$

$$\lim a_n = A_2 \Rightarrow \varepsilon\text{-hoz } \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : a_n \in K_\varepsilon(A_2)$$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \varepsilon\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :$

$$a_n \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset \quad \nmid \quad \square$$

6. A rendőrelv.

Tétel:

$(a_n), (b_n), (c_n)$ sorozatok. Tegyük fel, hogy:

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ ha $\exists \lim a_n = \lim c_n$, akkor $\exists \lim b_n = \lim a_n$

Bizonyítás:

Legyen $A = \lim a_n = \lim c_n$

1, $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

$A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 : c_n \in K_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2, N\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad b_n \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim b_n = A$

2, $A = \infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R} \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \quad a_n > P$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, N\} \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n > P \Rightarrow \lim b_n = \infty$

3, $A = -\infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R} \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \quad c_n < P$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, N\} \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : b_n \leq c_n < P \Rightarrow \lim b_n = -\infty \quad \square.$

7. Mit lehet mondani két sorozat tagjairól, ha az egyik határértéke nagyobb mint a másiké?

Tétel:

$(a_n), (b_n)$ sorozatok, $\exists A = \lim a_n, \exists B = \lim b_n$

$A > B \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N : a_n > b_n$

Bizonyítás:

a, $A, B \in \mathbb{R}$

Legyen $\varepsilon \leq \frac{A-B}{2} \Rightarrow K_\varepsilon(B) \cap K_\varepsilon(A) = \emptyset$

$\lim a_n = A \Rightarrow \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A)$

$\lim b_n = B \Rightarrow \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : b_n \in K_\varepsilon(B)$

Legyen $N = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : b_n < B + \varepsilon \leq A - \varepsilon < a_n$

b, $A = \infty, B \in \mathbb{R}$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : b_n \in K_\varepsilon(B)$

$P = B + \varepsilon$ -hoz $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : a_n > P \Rightarrow \exists N = \max\{n_0, n_1\}, \forall n \geq N :$

$b_n < B + \varepsilon = P < a_n$

c, $A = \infty, B = -\infty$

Tetszőleges $P \in \mathbb{R}$:

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1 : b_n < P$$

$$\exists n_2, \forall n \geq n_2 : a_n > P$$

$$\Rightarrow \exists N = \max\{n_1, n_2\}, \forall n \geq N : b_n < P < a_n$$

d, $A \in \mathbb{R}, B = -\infty$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in K_\varepsilon(A)$

$P = A - \varepsilon$ -hoz $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : b_n < P \Rightarrow \exists N = \max\{n_0, n_1\}, \forall n \geq N :$

$b_n < A - \varepsilon = P < a_n \quad \square.$

8. Műveletek nullsorozatokkal.

Tétel:

Tegyük fel, hogy $(a_n), (b_n)$ is nullsorozat.

Ekkor

- i, $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.
- ii, Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n c_n)$ is nullsorozat.
- iii, $(a_n b_n)$ is nullsorozat.

Bizonyítás:

- i, $\lim a_n = 0, \lim b_n = 0 \Rightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_2, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}, \forall n \geq n_0 : |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = 0$
- ii, (c_n) korlátos $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq K$
 $\lim a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon/K \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0 :$
 $|a_n c_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow \lim(a_n c_n) = 0$
- iii, (b_n) nullsorozat $\Rightarrow (b_n)$ korlátos. Lásd *ii*, pontot! \square .

9. Monoton növekvő sorozat határértéke (véges és végtelen eset).

Tétel:

Ha (a_n) monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens is, és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
Ha (a_n) monoton nő és nem felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

- (a_n) felülről korlátos $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi$ és
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \xi - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi \Rightarrow \lim a_n = \xi.$
 (a_n) nem felülről korlátos $\Rightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > K \Rightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$
 $K < a_{n_0} < a_n \Rightarrow \lim a_n = \infty \quad \square.$

10. A geometriai sorozat határértéke. Az e szám bevezetése az $(1 + 1/n)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozattal.

Geometria sorozat:

Tétel:

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ \infty, & \text{ha } q > 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Bizonyítás:

i, $q > 1$ $q = 1 + h$, ahol $h > 0$

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \xrightarrow{\rightarrow \infty} (\text{Bernoulli}) \Rightarrow \lim q^n = \infty$$

ii, $q = 1$ ✓

iii, $|q| < 1$ Ha $q = 0$ ✓

Legyen $|q| < 1$, $q \neq 0$

$$\text{Ekkor } \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h, h > 0$$

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh$$

$$0 < |q|^n < \frac{1}{nh} \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{rendorelv}} \lim q^n = 0$$

iv, $q = -1$, $(-1)^n$ divergens

$$\text{v, } q < -1 \Rightarrow |q| > 1 \Rightarrow \lim |q|^n = \infty \Rightarrow \lim q^{2n} = \infty \text{ és } \lim q^{2n+1} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim q^n \quad \square.$$

Az e szám bevezetése:

Tétel:

Az $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat korlátos, és monoton nő, ezért konvergens és

$$e := \lim (1 + \frac{1}{n})^n \sim 2,71$$

Bizonyítás:

Az (a_n) sorozat monoton növekedésének bizonyításához felhasználjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 * \underset{n\text{-szer}}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) \dots (1 + \frac{1}{n})} \leq \left(\frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n + 1}\right)^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}$$

Az (a_n) sorozat korlátosságának bizonyításához felhasználjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{n})^n = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n})^n \leq \left(\frac{2 * \frac{1}{2} + n(1 + \frac{1}{n})}{n + 2}\right)^{n+2} = 1$$

Ebből következik, hogy $a_n \leq 4$ ($n \in \mathbb{N}$) ezért a sorozat felülről korlátos. A monoton növekedés miatt nyilván alulról is korlátos \square .

11. Az $(\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}), (\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}), (n^k q^n, n \in \mathbb{N}), (a^n/n!, n \in \mathbb{N}), (n!/n^n, n \in \mathbb{N})$ **sorozat határértéke.**

$\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$:

Tétel:

$a > 0$ esetén $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

Bizonyítás:

i, $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + h_n, h_n > 0$

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + h_n)^n \underset{\text{Bern.}}{\geq} 1 + nh_n$$

$$\frac{a-1}{n} \geq h_n > 0 \xrightarrow{\rightarrow 0} \lim h_n = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$$

ii, $a = 1 \checkmark$

iii, $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad \square.$

$\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$:

Tétel:

$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás:

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, h_n > 0$

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + h_n)^n \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

$$\frac{2}{n-1} \geq h_n^2 > 0 \xrightarrow{\rightarrow 0} \lim h_n^2 = 0 \Rightarrow \lim h_n = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1 \quad \square.$$

$n^k q^n, n \in \mathbb{N}$:

Tétel:

$k \in \mathbb{N} |q| < 1$ rögzített: $\lim n^k q^n = 0$

Bizonyítás:

$$\frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + h)^n \geq \binom{n}{k+1} h^{k+1} \quad (n > k) =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} h^{k+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} (n-k) \dots n$$

$$0 \leq n^k |q|^n \leq \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \frac{1}{(n-k)(n-k+1) \dots n} = \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \frac{n^k}{n^{k+1} (1 - \frac{k}{n})(1 - \frac{k-1}{n}) \dots 1} =$$

$$= \underbrace{\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}}_{\text{konstants}} \underbrace{\frac{1}{(1 - \frac{k}{n})(1 - \frac{k-1}{n}) \dots 1}}_{\rightarrow 1} * \underbrace{\frac{n^k}{n^{k+1}}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim n^k q^n = 0 \quad \square.$$

$(a^n/n!, n \in \mathbb{N})$:

Tétel:

$a \in \mathbb{R}$ rögzített $\Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} = 0$

Bizonyítás:

Legyen $n_0 \geq |a|$

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1} \frac{|a|}{2} \dots \frac{|a|}{n_0} \frac{|a|}{n_0+1} \dots \frac{|a|}{n-1} \frac{|a|}{n} < \underbrace{\frac{|a|}{1} \frac{|a|}{2} \dots \frac{|a|}{n_0}}_{=c} * \frac{|a|}{n} = c * \frac{|a|}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} =$$

0 $\square.$

$n!/n^n, n \in \mathbb{N}$:

Tétel:

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

Bizonyítás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \square.$$

12. Nevezetes sorok: a geometria sor, a teleszkópikus sor, a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor, a harmonikus sor.

Geometriai sor:

Tétel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ sor konvergens} \Leftrightarrow |q| < 1. \text{ Ekkor } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Bizonyítás:

$$s_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

Legyen $a = 1, b = q$.

$$(1 - q^{n+1}) \text{ sorozat konvergens} \Leftrightarrow |q| < 1 \text{ Ekkor } \lim s_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \square.$$

Teleszkópikus sor:

Tétel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \text{ sorozat konvergens.}$$

Bizonyítás:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \Rightarrow \Rightarrow (s_n) \text{ konvergens és } \lim s_n = 1 \quad \square.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor:

Tétel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

Bizonyítás:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \quad (n > 1)$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow (s_n) \text{ korlátos és szigorúan monoton növekvő} \Rightarrow (s_n) \text{ konvergens} \quad \square.$$

Harmonikus sor:

Tétel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ sor divergens és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Bizonyítás:

Legyen $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{n}\right) > k * \frac{1}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow \lim s_n = \infty \quad \square.$$

13. Sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium. A konvergencia egy szükséges feltétele.

Cauchy-féle konvergenciakritérium:

Tétel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ sor konvergens} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 (n, m \in \mathbb{N}) :$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

Bizonyítás:

$$\sum a_n \text{ konvergens} \Leftrightarrow (s_n) \text{ konvergens} \underset{\text{cauchy}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall m > n \geq n_0 (m, n \in \mathbb{N}) :$$

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

$$\text{De } s_m - s_n = a_{n+1} + \dots + a_m \quad \square.$$

Szükséges feltétel:

Tétel:

$$\text{Ha } \sum a_n \text{ konvergens, akkor } \lim a_n = 0$$

Bizonyítás:

$$\sum a_n \text{ konvergens} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0 : |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

$$\text{Legyen } m = n + 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = 0 \quad \square.$$

14. Az e -re vonatkozó $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ előállítás. Az e irracionális szám. $2,6 < e < 2,8$.

Az e -re vonatkozó: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ előállítás Tétel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$$

Bizonyítás:

$s_n : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ($n \in \mathbb{N}$), elég belátni, hogy:

s_n konvergens, és $\lim(s_n) = e$

$s_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n \Rightarrow (s_n) \uparrow$; Elég belátni, hogy \exists felső korlát:

$x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ($n \geq 1$): $\lim x_n = e$

Fejtsük ki binomiálisan az $(1 + \frac{1}{n})^n$ -t!

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

$$\text{itt: } \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{(n-k)!(n-k+1)!(n-k+2)! \dots (n-k+k)!}{(n-k)!n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n-k+1}{n} \frac{n-k+2}{n} \dots \frac{n-k+k}{n} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{0}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

$$\text{Tehát: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{<1} + \frac{1}{3!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{<1} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \underbrace{\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}_{(\Delta)} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n$$

Tehát $\forall n \geq 1 : (1 + \frac{1}{n})^n < s_n$

Felső becslés s_n -re: Legyen $k \in \mathbb{N}$, és vegyük $n \geq k$ természetes számokat!

$$\text{Ekkor } \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{itt a } (\Delta)\text{-beli pozitív számokkal több van}} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{\rightarrow 1 \dots \rightarrow 1}$$

itt a (Δ) -beli pozitív számokkal több van

k fix, és $n \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = s_k \leq e$$

Tehát $\forall n \in \mathbb{N} n \geq 1 :$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < s_n \leq e \xrightarrow{\text{korl, mon}} (s_n) \text{ konvergens, és}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim(s_n) \leq e \xrightarrow{\text{kozr. fog}} \lim(s_n) = e \quad \square.$$

Az e irracionális szám: Tétel:

$$e \notin \mathbb{Q}$$

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük fel, hogy $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ és $\text{lnko}(p, q) = 1$

$$e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

A $q \in \mathbb{N}$ -hez $\exists \theta_q \in (0, 1)$

$$e - s_q = \frac{\theta_q}{qq!} \Rightarrow \theta_q = q * q! \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \Rightarrow \theta_q = pq! - q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \Rightarrow (k \leq q)$$

$$\Rightarrow \theta_q = pq! - q \sum_{k=0}^q (k+1)(k+2)\dots q$$

$\in (0,1)$ $\in \mathbb{Z}$
 $(0,1)$ intervallumban nincs egész szám $\nRightarrow e \notin \mathbb{Q}$ \square .

15. Pozitív tagú sorokra vonatkozó összehasonlító kritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív tagú sorokat és tfh.: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq b_n$

Ekkor:

- i, Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens
- ii, Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

Bizonyítás:

- i, Tegyük fel, hogy $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum_{n=N} b_n$ konvergens.

Jelölés:

$$S_n := b_N + b_{N+1} + \dots + b_n \quad (n \geq N)$$

$$s_n := a_N + a_{N+1} + \dots + a_n$$

$\sum_{n=N} b_n$ konvergens $\Rightarrow S_{(n)}$ korlátos, de $s_n \leq S_n$ ($\forall n \geq N$) $\Rightarrow (s_n)$ korlátos \Rightarrow
 $\Rightarrow \sum_{n=N} a_n$ konvergens $\Rightarrow \sum_{n=0} a_n$ konvergens.

- ii, Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum_{n=N} a_n$ divergens $\Rightarrow (s_n)$ felülről nem korlátos,
de $S_n \geq s_n \quad \forall n \geq N \Rightarrow (S_n)$ felülről nem korlátos $\Rightarrow \sum_{n=N} b_n$ divergens \Rightarrow
 $\Rightarrow \sum_{n=0} b_n$ divergens. \square

16. A gyökkritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ sort és tegyük fel, hogy $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$ határérték.

Ekkor:

- i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens
- ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens
- iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

Bizonyítás:

- i, Legyen $A < q < 1$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A < q \Rightarrow \exists n_0 \forall \in \mathbb{N} n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < q \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n| < q^n$

$\sum q^n$ geometriai sor konvergens, mert $q < 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ is konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens.

- ii, Legyen $1 < q < A$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > q \Rightarrow |a_n| >$
 $q^n > 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum a_n$ divergens, hiszen különben $\lim a_n = 0$

- iii, Pl. $A = 1 \sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1 = A$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ divergens, és } \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 = A \quad \square.$$

17. A hányadoskritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ sort, $a_n \neq 0, (n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$ határérték.

Ekkor:

- i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens
- ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens
- iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

Bizonyítás:

i, Legyen $A < q < 1$, $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q \Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| < q|a_n| \Rightarrow |a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \dots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = \underbrace{q^{-n_0}|a_{n_0}|}_{=K} * q^n \quad (n \geq n_0) \Rightarrow |a_n| < K * q^n \quad (\forall n \geq n_0)$

$\sum Kq^n$ konvergens geometriai sor, hiszen $0 < q < 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ sor $\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens.

ii, Legyen $1 < q < A$, $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > q \Rightarrow \Rightarrow |a_n| > q|a_{n-1}| > \dots > q^{n-n_0}|a_{n_0}| = Kq^n > K > 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergens.

iii, $\sum \frac{1}{n}$ divergens, de $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 = A$

$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, de $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow 1 = A \quad \square$.

18. A tizedes törttekre vonatkozó két tétel.

Tétel:

Tfh $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ konvergens és $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1]$

Bizonyítás:

$$a_n \leq 9 \Rightarrow \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \text{ sor konvergens, hiszen } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} * \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \text{ (geometriai sor)} \quad \square$$

Tétel:

Ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor $\exists (a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, hogy $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Bizonyítás:

A $[0, 1]$ intervallumot 10 egyenlő intervallumra osztjuk. $\exists I_1 = \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10} \right], \alpha \in I_1$
 I_1 -et osztjuk 10 egyenlő intervallumra. $\exists I_2 = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100} \right], \alpha \in I_2$

⋮

$$\exists I_n = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n} \right], \alpha \in I_n$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\text{Jel: } s_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$\alpha \in I_n \Leftrightarrow s_n \leq \alpha \leq s_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow 0 \leq \alpha - s_n \leq \frac{1}{10^n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim s_n = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \alpha \quad \square$$

19. Sorok téglányszorzatának definíciója. Két konvergens sor téglányszorzatáról szóló tétel.

Definíció:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ két sor.

Ekkor a $\sum t_n$ sort *téglányszorzatnak* nevezzük, ahol $t_n := \sum_{\max(i,j)=n} a_i b_j$

Tétel:

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum t_n$ téglányszorzat is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N t_n &= \sum_{n=0}^N \sum_{\max(i,j)=n} a_i b_j = \sum_{\max(i,j) \leq N} a_i b_j = \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) \rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum t_n \text{ konvergens és } \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \quad \square. \end{aligned}$$

20. Torlódási pont fogalma. Függvény határértéke egyértelmű.

Definíció:

Az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$ -ra $H \cap K_\varepsilon(a)$ végtelen halmaz.

A függvény határértékének egyértelmősége:

Tétel:

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathfrak{D}'_f$ pontban van határértéke, ha

$\exists A \in \bar{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A)$ és a határérték egyértelmű. $\lim_a f = A$.

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$ határértékei az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}'_f$ -ben

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A_1)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A_2)$

$\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset$

Legyen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \varepsilon$ -hoz $\exists \delta > 0$,

$\forall x \in \mathfrak{D}_f \cap K_\delta(a) \setminus \{a\} : f(x) \in K_\varepsilon(A_1)$

$\forall x \in \mathfrak{D}_f \cap K_\delta(a) \setminus \{a\} : f(x) \in K_\varepsilon(A_2)$

$\nmid K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset \quad \square.$

21. Az átviteli elv.

Tétel:

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathfrak{D}'_f$

Ekkor $\lim_a f = A \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}, \lim x_n = a : \lim f(x_n) = A$

Bizonyítás:

" \Rightarrow " $\lim_a f = A \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}$ és $\lim x_n = a \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :$

$x_n \in K_\delta(a), x_n \neq a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(x_n) \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim f(x_n) = A \quad \checkmark$

" \Leftarrow " Tegyük fel, hogy a jobb oldal teljesül. *Indirekt:*

Tegyük fel, hogy a bal oldal teljesülése mellett $\lim_a f \neq A. \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, \exists x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \notin K_\varepsilon(A)$

Legyen $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \notin K_\varepsilon(A). De ekkor x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \Rightarrow$

$\lim x_n = a, x_n \neq a \Rightarrow \lim f(x_n) = A$

$\nmid f(x_n) \notin K_\varepsilon(A), n \in \mathbb{N} \quad \square.$

22. A közrefogási elv. A műveletek és a határérték kapcsolata(bizonyítással)
Közrefogási elv:

Tétel:

$$\begin{aligned} f, g, h &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ a &\in (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h)' \text{ Tegyük fel, hogy } \exists K(a) : f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \forall x &\in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h \cap (K(a) \setminus \{a\}) \\ \text{Ha } \exists \lim_a f &= \lim_a h, \text{ akkor } \exists \lim_a g = \lim_a f \end{aligned}$$

Bizonyítás:

felhasználjuk: átviteli elv + sorozatok

$$\begin{aligned} (x_n) : \mathbb{N} &\rightarrow \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim h(x_n) \Rightarrow \lim g(x_n) = \lim f(x_n) = \\ \lim_a f &\stackrel{\text{atv.elv}}{\Rightarrow} \lim_a g = \lim_a f \quad \square. \end{aligned}$$

Műveletek és határérték kapcsolata

Tétel:

$$f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)', \exists \lim_a f, \exists \lim_a g. \text{ Ekkor:}$$

- i, $\exists \lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$, ha ez utóbbi \exists
- ii, $\exists \lim_a (fg) = (\lim_a f)(\lim_a g)$, ha ez utóbbi \exists
- iii, $\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$, ha ez utóbbi \exists

Bizonyítás:

Csak az első állítást bizonyítjuk, a többi már adódik. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow H \setminus \{a\}$ sorozat, melyre $\lim x_n = a$. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_a f = A &\stackrel{\text{atv.elv}}{\Rightarrow} \lim(f(x_n)) = A \\ \lim_a g = B &\stackrel{\text{atv.elv}}{\Rightarrow} \lim(g(x_n)) = B \end{aligned}$$

Most van két sorozatunk, melyekre alkalmazzuk a műveletek tulajdonságait és az átviteli elvet:

$$\exists \lim_a (f(x_n) + g(x_n)) = A + B \stackrel{\text{atv.elv}}{\Rightarrow} \lim_a (f + g) = A + B \quad \square.$$

23. A hatványfüggvény határértéke.

Tétel:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bizonyítás:

$$|x^n - a^n| = |x - a| |x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}| \leq |x - a|c \leq \delta c < \varepsilon$$

Hiszen feltehető: $x \in K_1(a)$, azaz $x \in (a - 1, a + 1) \Rightarrow |x| \leq |a| + 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{c}, 1\right), \forall x \in \mathbb{R} \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : x^n \in K_\varepsilon(a^n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \square.$$

24. Monoton függvények határértéke.

Tétel:

Legyen $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ korlátos, vagy nem korlátos intervallum. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény.

Ekkor $\exists \lim_{a+0} f$ és $\lim_{a-0} f$, $a \in (\alpha, \beta)$:

i, Ha f monoton nő, akkor:

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) \mid x < a, x \in (\alpha, \beta)\}$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\{f(x) \mid x < a, x \in (\alpha, \beta)\}$$

ii, Ha f monoton fogy, akkor:

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) \mid x > a, x \in (\alpha, \beta)\}$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\{f(x) \mid x > a, x \in (\alpha, \beta)\}$$

Bizonyítás:

Elég csak egy esetet belátni, a többi állítás a sup és inf tulajdonságaiból, és az első állítás bizonyításából értelemszerűen adódik.

Legyen $M = \sup\{f(x) \mid x < a\} \Rightarrow f(x) \leq M \quad \forall x < a, x \in (\alpha, \beta)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 < a : M - \varepsilon < f(x_1) \leq M \Rightarrow \forall x_1 < x < a : M - \varepsilon < f(x) \leq M$

Legyen $\delta : a - x_1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = a - x_1, \forall x \in (\alpha, \beta), x < a, 0 < a - x < \delta :$

$|f(x) - M| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{a-0} f = M \quad \square.$

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 tavaszi féléves Analízis I. előadás alapján írt órai jegyzetem
- Szili László: Analízis Feladatokban I.
- Wikipédia
- Szántó Ádám: Analízis