ANALÍZIS II. TÉTELBIZONYÍTÁSOK ÍRÁSBELI VIZSGÁRA

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2013. január 16.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény korlátos is.

Tétel:

$f : [a,b] : \mathbb{R}$ folytonos függvény $\Rightarrow$ korlátos is.

Bizonyítás:

f korlátos $\Rightarrow \exists\, K > 0 : \forall\, x \in [a,b] : |f(x)| \leq K$
Indirekt: $\forall\, K > 0 : \exists\, x \in [a,b] : |f(x)| > K$
Legyen $K = n \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$
Tekintsük az x_n sorozatot!
$x_n \in [a,b] \Rightarrow (x_n)$ korlátos $\underset{Bolzano-Weiestrass}{\Rightarrow}$ kiválasztható konvergens (x_{n_k}) részsorozat.
Legyen $\alpha = \lim x_{n_k}$. Ekkor:
$\alpha \in [a,b]$, ugyanis indirekt, tfh. $\alpha \notin [a,b]$. Ekkor $\exists\, K_\varepsilon(\alpha)$, $K_\varepsilon(\alpha) \cap [a,b] = \emptyset$
De ε-hoz $\exists\, k_0, \forall\, k \geq k_0 :\ x_{n_k} \in K_\varepsilon(\alpha)$ $\lightning$ hiszen $x_{n_k} \in [a,b] \Rightarrow \alpha \in [a,b]$
f folytonos $\Rightarrow f \in \mathscr{C}(\alpha)$. Ekkor $\lim x_{n_k} = \alpha$ miatt $f(x_{n_k}) = f(\alpha)$ (átviteli elv miatt) $\Rightarrow f(x_{n_k})$ sorozat konvergens $\Rightarrow f(x_{n_k})$ korlátos $\lightning$ hiszen $|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ nem korlátos. $\square$.

2. A Weierstrass-tétel.

Tétel:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek $\exists$ abszolút maximuma/minimuma.

Bizonyítás:

Mivel $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, így f korlátos. Ekkor:
$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$
$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$
Igazoljuk, hogy $\exists\, \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = M$!
M a szuprémum $\Rightarrow \forall\, n, \exists\, y_n \in \mathfrak{R}_f : M - \frac{1}{n} < y_n \leq M \Rightarrow \exists\, x_n \in [a,b]$
$f(x_n) = y_n \Rightarrow \lim y_n = \lim f(x_n) = M$
x_n korlátos $\Rightarrow$ kiválaszható konvergens x_{n_k} részsorozat.
Legyen $\alpha = \lim x_{n_k}$! f folytonos $\Rightarrow f \in \mathscr{C}(\alpha)$
$\lim x_{n_k} = \alpha \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$
De $\lim f(x_n) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M = f(\alpha) \Rightarrow M$ az abszolút maximum érték.
Minimum ugyanígy. $\square$.

3. Bolzano-tétel.

Tétel:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ha $f(a) * f(b) < 0$, akkor $\exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = 0$.

Bizonyítás:

Tegyük fel hogy $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, Legyen $[x_0, y_0] = [a,b]$ és $z_0 = \frac{a+b}{2}$

1. eset : $f(z_0) = 0$

2. eset : $f(z_0) < 0 \Rightarrow$ Legyen $[x_1, y_1] = [z_0, y_0]$

3. eset : $f(z_0) > 0 \Rightarrow$ Legyen $[x_1, y_1] = [x_0, z_0]$

Ezt az eljárást folytatva vagy kapunk egy $\xi \in [a,b]$-t, úgy hogy $f(\xi) = 0$✓ vagy nem.

Ekkor definiáltunk egy $[x_n, y_n]$ intervallum sorozatot, amelyre igaz:

i, $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$

ii, $f(x_n) < 0, f(y_n) > 0$

iii, $y_n - x_n = \dfrac{(b-a)}{2^n}$

Cantor tulajdonság miatt $\exists\, \xi \in \cap_{n=0}^{\infty} [x_n, y_n]$

$y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \exists !\, \xi \in \cap_{n=0}^{\infty} [x_n, y_n]$, ugyanis $0 \le y_n - \xi \le y_n - x_n \to 0$, tehát $\lim y_n = \xi$, hasonlóan $\lim x_n = \xi$

Mivel f folytonos $\Rightarrow f \in \mathscr{C}(\xi)$

Az átviteli elv miatt $\Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi), \lim f(x_n) = f(\xi)$

De $f(x_n) < 0, f(y_n) > 0 \Rightarrow f(\xi) \le 0, f(\xi) \ge 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \qquad \square.$

4. Heine-tétel

Tétel:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos.

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük fel hogy f nem egyenletesen folytonos $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0$, $\exists\, x, y \in [a,b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$

Legyen $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta = \frac{1}{n}, \exists\, x_n, y_n \in [a,b], |x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$

Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ sorozatot $\Rightarrow (x_n)$ korlátos $\underset{Bolz.-Weis.tetel}{\Rightarrow} \exists\, (x_{n_k})$ konvergens részsorozat.

Legyen $\alpha = \lim x_{n_k} \Rightarrow \alpha \in [a,b]$

$$\begin{cases} |y_{n_k} - \alpha| < |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| \\ |y_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{n_k} |x_{n_k} - \alpha| \to 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim y_{n_k} = \alpha$

f folytonos $\Rightarrow f \in \mathscr{C}(\alpha) \underset{atv.elv}{\Rightarrow} \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$ és $\lim f(y_{n_k}) = f(\alpha)$

$\Rightarrow \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0 \Rightarrow \lim |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$ ↯ $\quad |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon \Rightarrow f$ egyenletesen folytonos. $\qquad \square.$

5. Folytonos invertálható függvény jellemzése a monotonítással.

Tétel:

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $\exists\, f^{-1} \Rightarrow f$ szigorúan monoton.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és igazoljuk, hogy f szigorúan monoton. Igazoljuk, hogy
$f(a) = \min\limits_{[a,b]} f$
$f(b) = \max\limits_{[a,b]} f$
Indirekt: Tegyük fel, hogy $f(a) > \min\limits_{[a,b]} f$
Weierstrass tétel miatt $\exists\, \alpha \in (a, b) : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f$ Tekintsük az $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$
$\underset{Bolz.}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (\alpha, b) : f(\xi) = f(a)$, hiszen $f(a) \in (f(\alpha), f(b))$ ↯ $\quad f^{-1}\, \exists$
A maximumra ugyanígy.
Tegyük fel, hogy $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \in (f(x_2), f(b))$
Tekintsük az $f : [x_2, b] \to \mathbb{R} \underset{Bolz.}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x_2, b) : f(\xi) = f(x_1)$ ↯ mert $\exists\, f^{-1}$ $\quad\square$.

6. Differenciálható függvények összege, szorzata, hányadosa.

Tétel:

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int}\ (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)$, $f, g \in \mathscr{D}(a)$ Ekkor

i, $f + g \in \mathscr{D}(a)$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $fg \in \mathscr{D}(a)$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

iii, Ha $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in \mathscr{D}(a)$ és $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bizonyítás:

i, $\mathfrak{D}_{f+g} = \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$, $a \in \text{int}\ (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g) = \text{int}\ \mathfrak{D}_{f+g}$

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \to f'(a) + g'(a) \qquad x \to a$$

ii, $$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \to g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \text{ mert } g \in \mathscr{C}(a) \Rightarrow$$
$g(x) \to g(a) \quad x \to a$

iii, Igazoljuk, hogy $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} =$$
$$= \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \frac{-1}{g(a)g(x)}\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \to \frac{-1}{g^2(a)}g'(a) \qquad x \to a$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\frac{1}{g'}(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} =$$
$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \qquad \square.$$

7. A differenciálszámítás középértéktételei(Rolle-, Cauchy-, Lagrange-tétel).

Rolle-tétel

Tétel:

$f \in \mathscr{C}[a,b]$, $f \in \mathscr{D}(a,b)$, $f(a) = f(b)$. Ekkor
$\exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0.$

Bizonyítás:

$f \in \mathscr{C}[a,b]$, Weierstrass miatt $\Rightarrow \exists$ abszolút minimuma és abszolút maximuma.
Legyen $\alpha, \beta \in [a,b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f = m$, $f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f = M$ 3 eset lehetséges:

1. eset: $m = M \Rightarrow f = m \quad [a,b]$-n$\Rightarrow f' = 0 \quad (a,b)$-n
2. eset: $m < M$, $m \neq f(a) = f(b)$
   Ekkor $\alpha \in (a,b)$ hiszen $\alpha \neq a \wedge \alpha \neq b \Rightarrow f$-nek α-ban lokális minimuma van $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$
3. eset: $m < M$, $m = f(a) = f(b) \Rightarrow M \neq f(a) = f(b)$
   $f(\beta) = M \Rightarrow \beta \neq a \wedge \beta \neq b \Rightarrow \beta \in (a,b) \Rightarrow f$-nek β-ban lokális maximuma van $\Rightarrow f'(\beta) = 0 \qquad \square.$

Cauchy-tétel

Tétel:

$f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $f, g \in \mathscr{D}(a,b)$, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$. Ekkor
$\exists\, \xi \in (a,b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$

Bizonyítás:

$g(b) \neq g(a)$ hiszen különben Rolle tétele miatt $\exists\, \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$ ↯
Visszavezetjük a Rolle tételre: Legyen $F = f - \lambda g$, válasszuk meg $\lambda \in \mathbb{R}$-t, hogy alkalmazhassuk a Rolle-tételt.
$F \in \mathscr{C}[a,b]$, $F \in \mathscr{D}(a,b)$ nyílván. $F(b) = F(a)$.
$f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a) \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Legyen ez a λ. Rolle tétele miatt:
$\exists\, \xi \in (a,b) : F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} =$
$= \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \square.$

Lagrange-tétel

Tétel:

$f \in \mathscr{C}[a,b]$, $f \in \mathscr{D}(a,b)$. Ekkor
$\exists\, \xi \in (a,b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$

Bizonyítás:

Legyen $g(x) = x$ a Caucy-féle középérték tételben. Ekkor $g'(x) = 1 \qquad \square.$

8. A monotonitásra vonatkozó elégséges, szükséges és elégséges feltételek.

Monotonításra vonatkozó elégséges feltétel

Tétel:

$f \in \mathscr{D}(a,b)$. Ekkor

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton nő

ii, $f' > 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő

iii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton csökken

iv, $f' < 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken.

Bizonyítás:

i, Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$

$f \in \mathscr{C}[x_1,x_2]$, $f \in \mathscr{D}(x_1,x_2) \underset{Lagrange}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x_1,x_2) : f(x_2) - f(x_1) =$

$= f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad$ ha $x_2 > x_1 \Rightarrow f$ monoton nő.

ii, iii, iv, esetet hasonlóan $\square$.

Monotonításra vonatkozó szükséges és elégséges feltétel

Tétel:

$f \in \mathscr{D}(a,b)$. Ekkor

i, f monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0 \quad (a,b)$-n

ii, f szigorúan monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0 \quad (a,b)$-n és $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n.

iii, f monoton csökken $\Leftrightarrow f' \leq 0 \quad (a,b)$-n

iv, f szigorúan monoton csükken $\Leftrightarrow f' \leq 0$ (a,b)-n és $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n.

Bizonyítás:

i, $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy f monoton nő. Legyen $\xi \in (a,b)$ tetszőleges.

$f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$, ha $x > \xi$ és ha $x < \xi \Rightarrow f' \geq 0 \quad (a,b)$-n.

$\Leftarrow$: Előző tétel.

ii, $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy f szigorúan monoton nő $\Rightarrow$ f monoton nő $\Rightarrow f' \geq 0$ (a,b)-n

f szigorúan monoton $\Rightarrow \nexists\, c < d$, $f(c) = f(d) \Rightarrow \nexists\, (c,d) \subset (a,b) : f = E \quad (c,d)$-n

$\Rightarrow \nexists\, (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n

$\Leftarrow$: $f' \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő. Ha f nem szigorúan monoton nő, akkor $\exists\, c, d \in (a,b) : f(c) = f(d) \Rightarrow f = E \quad (c,d)$-n $\Rightarrow \exists\, (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n. $\lightning$

Másik két pontot hasonlóan $\square$.

9. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel.

Tétel:

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor f *Darboux* tulajdonságú, azaz $\forall\, a, b \in I$, $a < b$, $\forall\, c \in (f(a), f(b))\, \exists\, \xi \in (a, b) : f(\xi) = c$.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$, legyen f primitív függvénye F, $f_1 := f - c \Rightarrow f_1$-nek is létezik primitív függvénye: $F_1(x) = F(x) - cx$, hiszen
$F_1'(x) = F'(x) - c = f(x) - c = f_1(x)$
$f_1(a) = f(a) - c < 0 \Rightarrow F_1'(a) < 0$ és
$f_1(b) = f(b) - c > 0 \Rightarrow F_1'(b) > 0$
$\Rightarrow F_1'(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{F_1(x) - F_1(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in (a, a + \delta) : \dfrac{F_1(x) - F_1(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow$
$F_1(x) < F_1(a) \quad \forall\, x \in (a, a + \delta)$
$F_1'(b) = \lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in (b - \delta, b) : \dfrac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow$
$F_1(x) < F_1(b) \quad \forall\, x \in (b - \delta, b)$
$F_1 \in \mathscr{D}(I) \Rightarrow F_1 \in \mathscr{C}[a, b]$. Weierstrass tétel miatt létezik abszolút minimum, azaz $\exists\, \xi \in [a, b] : F_1(\xi) = \min\limits_{[a,b]} F_1 \quad \xi \neq a, \xi \neq b \Rightarrow \xi \in (a, b) \Rightarrow \xi$ lokális minimum is $\Rightarrow F_1'(\xi) = 0 \Rightarrow f_1(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - c = 0 \qquad \square$.

10. Az integrálhatóság jellemzése az oszcilllációs összegekkel.

Tétel:

$f \in \mathscr{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \tau\; in \mathscr{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Bizonyítás:

$\Leftarrow$, Tegyük fel, hogy $\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon \Rightarrow s(f, \tau) \leq I_* f \leq I^* f \leq S(f, \tau) \Rightarrow$ $I * f - I_* f < \varepsilon$.
ε tetszőleges $\Rightarrow I_* f = I^* f$

$\Rightarrow$, $f \in \mathscr{R}[a, b]$, azaz $I_* f = I^* f = I_f$
$I_* f = \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathscr{F}[a, b]\} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \tau_1 \in \mathscr{F}[a, b] : If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq If$
$I^* f = \inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathscr{F}[a, b]\} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \tau_2 \in \mathscr{F}[a, b] : If \leq S(f, \tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$
Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau) \leq If \leq S(f, \tau) \leq S(f, \tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon \qquad \square$.

11. Az integrálhatóság jellemzése alsó és felső közelítő összegek határértékével.

Tétel:

$f \in \mathscr{R}[a, b]$ és $\int\limits_a^b f = I \Leftrightarrow \exists\, (\tau_n)$ felosztássorozat, hogy $\lim s(f, \tau_n) = \lim S(f, \tau_n) = I$.

Bizonyítás:

$\Rightarrow$, Ha $f \in \mathscr{R}[a, b]$, akkor $\forall\, n$-re $\exists\, \tau_n \in \mathscr{F}[a, b] : If - \frac{1}{n} < s(f, \tau_n) < S(f, \tau_n) < If + \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n \to \infty} If - \frac{1}{n} = If \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} s(f, \tau_n) = \lim\limits_{n \to \infty} S(f, \tau_n) = If = I$

$\Leftarrow$, Tegyük fel, hogy $\exists\, (\tau_n)$, $\lim s(f, \tau_n) = \lim S(f, \tau_n) = I$
Mivel $s(f, \tau_n) \leq I_* f \leq I^* f \leq S(f, \tau_n)$, ezért $I_* f = I^* f = I \Rightarrow f \in \mathscr{R}[a, b] \qquad \square$.

12. Folytonos függvény integrálható.

Tétel:

$\mathscr{C}[a,b] \subset \mathscr{R}[a,b]$.

Bizonyítás:

$f \in \mathscr{C}[a,b] \underset{heine}{\Rightarrow} f$ egyenletesen folytonos $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Legyen $\tau \in \mathscr{F}[a,b]$ olyan, hogy $||\tau|| < \delta$ ahol $||\tau|| := \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1 \dots n\}$ a felbontás finomsága.

$\Omega(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup|f(x) - f(y)|(x_i - x_{i-1})$ úgy, hogy $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ekkor $|x-y| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \Omega(f,\tau) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \tau \in \mathscr{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) \leq \varepsilon(b-a) \qquad \square$.

13. Monoton függvény integrálható.

Tétel:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény $\Rightarrow A \in \mathscr{R}[a,b]$.

Bizonyítás:

$\delta > 0$-t később megválasztjuk. Legyen $\tau \in \mathscr{F}[a,b]$ úgy, hogy $||\tau|| < \delta$. Tegyük fel, hogy f monoton. Ekkor $\Omega(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) =$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \delta \sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$

$\delta(f(x_n) - f(x_0)) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon$, hacsak $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \tau :$

$\Omega(f,\tau) < \varepsilon \Rightarrow f \in \mathscr{R}[a,b]$. Ha $f(a) = f(b)$, akkor f konstans $\qquad \square$.

14. A Newton-Leibniz-tétel.

Tétel:

Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{R}[a,b]$ és f-nek $\exists F$ primitív függvénye. Ekkor $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Bizonyítás:

$\tau \in \mathscr{F}[a,b], \tau = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$

$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(x_0) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}))$

$F \in \mathscr{D}(a,b) \quad$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(\xi_I)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow F(b) - F(a) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$s(f,\tau) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f,\tau)$

$s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) \leq S(f,\tau)$

$\int\limits_a^b f = \sup\limits_{\tau \in \mathscr{F}[a,b]} s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf\limits_{\tau \in \mathscr{F}[a,b]} S(f,\tau) = \int\limits_a^b f \Rightarrow \int\limits_a^b f = F(b) - F(a) \qquad \square$.

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzetem