ANALÍZIS II. DEFINÍCIÓK, TÉTELEK

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2013. január 16.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathfrak{D}_f$ pontban, ha $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x \in \mathfrak{D}_f,\ |x-a| < \delta : \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?
Ha $a \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}'_f$, akkor $f \in \mathscr{C}(a) \Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

3. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?
Hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergencia halmaz beslejében, azaz konvergenciatartományon.

4. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?
$a \in \mathfrak{D}_f$, ekkor $f \in \mathscr{C}(a) \Leftrightarrow \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{D}_f$, amelyre $\lim x_n = a : \lim f(x_n) = f(a)$.

5. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt!
$g \in \mathscr{C}(a),\ f \in \mathscr{C}(a)$
Ekkor $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}(a)$.

6. Milyen tételt ismer az összetett függény pontbeli folytonosságáról?
$g \in \mathscr{C}(a),\ f \in \mathscr{C}(g(a))$ és $\mathfrak{R}_g \subset \mathfrak{D}_f$
Ekkor $f \circ g \in \mathscr{C}(a)$

7. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát!
Az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}_f$ megszüntethető szakadási helye, ha $\exists$ és véges $\lim\limits_{a} f \neq f(a)$.

8. Definiálja a *elsőfajú szakadási hely* fogalmát!
Az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}_f$ elsőfajú szakadási helye, ha $\exists$ és véges $\lim\limits_{a+0} f \neq \lim\limits_{a-0} f$.

9. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $\Rightarrow f$ korlátos $[a, b]$-n.

10. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek $\exists$ abszolút maximuma/minimuma.

11. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.
Ha $f(a) * f(b) < 0$, akkor $\exists\, \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$.

12. Mit tud mondani intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?
$f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{R}_f$ is intervallum.

13. Mikor nevez egy függvényt egyenletesen folytonosnak?
$f : A \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x, y \in A,\ |x - y| < \delta :$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

14. Írja le a *Heine-tételt*!
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos.

15. Milyen állításokat ismer az inverz függvény folytonosságáról?
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\exists\, f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ is folytonos.
$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és $\exists\, f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ is folytonos.

16. Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ függvény *folytonos* és *invertálható*! Mit mondhatunk ekkor az f függvény monotonitásáról?
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $\exists\, f^{-1} \Rightarrow f$ szigorúan monoton.

17. Értelmezze az $\ln$ függvényt!
$\exists \exp^{-1} =: \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény.

18. Mi a definíciója az a^x $(a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?
$\exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x \quad (a, x \in \mathbb{R},\, a > 0)$

19. Értelmezze az $\log_a$ függvényt!
$\log_a = \exp_a^{-1}$ szigorúan monoton, folytonos, ha $0 < a < 1$ vagy $a > 1$.

20. Mi a definíciója az x^α $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ hatványfüggvénynek?
$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \qquad x \in (0, \infty),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

21. Mikor mondja, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$ pontban differenciálható(deriválható), ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ határérték. Ekkor $f'(a)$ a függvény deriváltja az $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$ pontban.
Jelölés: $f \in \mathscr{D}(a)$.

22. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$, Ekkor
$f \in \mathscr{D}(a) \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon : \mathfrak{D}_f \to \mathbb{R}$,
$\lim\limits_a \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathfrak{D}_f)$
Ekkor $A = f'(a)$.

23. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$. Ekkor
i, $f \in \mathscr{D}(a) \Rightarrow f \in \mathscr{C}(a)$
ii, $f \in \mathscr{D}(a) \not\Leftarrow f \in \mathscr{C}(a)$.

24. Milyen tételt ismer két függény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?
$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)$, $f, g \in \mathscr{D}(a)$ Ekkor
$fg \in \mathscr{D}(a)$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

25. Milyen tételt ismer két függény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?
$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)$, $f, g \in \mathscr{D}(a)$ Ekkor
Ha $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in \mathscr{D}(a)$ és $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

26. Milyen tételt ismer két függény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?
$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{R}_g \subset \mathfrak{D}_f$, $g \in \mathscr{D}(a), f \in \mathscr{D}(g(a))$. Ekkor
$f \circ g \in \mathscr{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

27. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és deriváltjáról?
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, szigorúan monoton nő és folytononos függvény. $\xi \in (a, b)$, $f \in \mathscr{D}(\xi)$ és $f'(\xi) \neq 0$. Ekkor
$f^{-1} \in \mathscr{D}(\eta)$ és $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(\xi)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$, ahol $f(\xi) = \eta$.

28. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és deriváltjáról?
Tegyük fel hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$.
Jelölje $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$. Ekkor
$\forall\, x_0 \in K_R(a) : f \in \mathscr{D}(x_0)$ és $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\alpha_n (x_0 - a)^{n-1}$.

29. Mi az egyoldali derivált definíciója?
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{D}_f$ és $\exists\, \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset \mathfrak{D}_f$. Ekkor f jobbról deriválható az a pontban ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$
Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{D}_f$ és $\exists\, \delta > 0 : (a-\delta, a] \subset \mathfrak{D}_f$. Ekkor f balról deriválható az a pontban ha $\exists$ és véges a $\lim\limits_{x \to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a)$

30. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$ pontban, ha $\exists\, K(a) \subset \mathfrak{D}_f$, hogy $f \in \mathscr{D}(K(a))$ és $f' \in \mathscr{D}(a)$. Ekkor
Az $f''(a) = (f')'(a)$ Jelölés: $f \in \mathscr{D}^2(a)$

31. Mi az n-szer deriválható függvény fogalma?
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény n-szer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$ pontban, ha $\exists\, K(a) \subset \mathfrak{D}_f$, hogy $f \in D^{n-1}(K(a))$ és $f^{(n-1)} \in D(a)$. Ekkor
$f^n(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ Jelölés: $f \in D^n(a)$.

32. Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó *Leibniz-tétel*t!
Ha $f, g \in D^n(a)$, akkor $fg \in D^n(a)$ és $(fg)^{(n)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$.

33. Mondja ki a *Rolle tétel*t!
$f \in \mathscr{C}[a, b]$, $f \in \mathscr{D}(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Ekkor
$\exists\, \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

34. Mondja ki a *Cauchy-féle középértéktétel*t!
$f, g \in \mathscr{C}[a, b]$, $f, g \in \mathscr{D}(a, b)$, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ekkor
$\exists\, \xi \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

35. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt*!
$f \in \mathscr{C}[a,b]$, $f \in \mathscr{D}(a,b)$. Ekkor
$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

36. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$ pontban *lokális minimuma* van, ha
$\exists\, K(a) \subset \mathfrak{D}_f : f(x) \geq f(a) \quad \forall\, x \in K(a)$.

37. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathfrak{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0, K_\varepsilon(c) \subset \mathfrak{D}_f$, $f(x) < 0\, \forall\, x \in (c-\delta, c)$ és $f(x) > 0\, \forall\, x \in (c, c+\delta)$ vagy fordítva.

38. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathfrak{D}_f$, $f \in \mathscr{D}(a)$.
Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.

39. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{D}(a,b)$, $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$.
Ha f' előjelet vált c-ben, akkor f-nek lokális szélsőértéke van. Ha f' '-'-ból '+'-ba vált akkor f-nek lokális minimuma van, ha f' '+'-ból '-'-ba vált akkor f-nek lokális maximuma van.

40. Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű* feltételt!
Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{D}(a,b)$, $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$.
Ha $f \in \mathscr{D}^2(c)$ és $f''(c) \neq 0$, akkor f-nek lokális szélsőértéke van c-ben. Ha $f''(c) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van, ha $f''(c) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van.

41. Milyen *szükséges* és *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?
$f \in \mathscr{D}(a,b)$. Ekkor
i, f monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0 \quad (a,b)$-n
ii, f szigorúan monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0 \quad (a,b)$-n és $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n.

42. Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt*!
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és:
i, $f, g \in \mathscr{D}(a,b),\ -\infty \leq a < b < \infty$
ii, $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$
iii, $g'(x) \neq 0 \quad x \in (a,b)$
iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \in \bar{\mathbb{R}}$
Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A$.

43. Írja le a $\frac{\infty}{\infty}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt*!
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és:
i, $f, g \in \mathscr{D}(a, b),\ -\infty \leq a < b < \infty$
ii, $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty$
iii, $g'(x) \neq 0 \quad x \in (a, b)$
iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \bar{\mathbb{R}}$
Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A$.

44. Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?
Legyen $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$ egy konvergens hatványsor összegfüggvénye ($R > 0$ feltehető)$\Rightarrow$ $f \in \mathscr{D}^{\infty}(x)$ és $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \alpha_n n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$ és $f^{(k)}(a) = \alpha_k k! \Rightarrow \alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N})$.

45. Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?
Ha $f \in \mathscr{D}^{\infty}(a)$ $\Rightarrow$Legyen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ hatványsor az f függvény a ponthoz tartozó Taylor sora.

46. Fogalmazza meg a *Taylor formula Lagrange maradéktaggal* néven tanult tételt!
Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{D}^{(n+1)}(K(a))$. Ekkor $\forall\, x \in K(a) : \exists \xi \in (a, x)$:
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)(x-a)^{n+1}$

47. Mi a konvex függvény defínciója?
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ha $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \forall\, \lambda \in [0, 1]$:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ és szigorúan konvex, ha
$\forall\, x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

48. Jellemezze egy függvény konvexitását (konkávitását) az első derivált segítségével!
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$
$f \in \mathscr{D}(a, b)$:
a, f konvex $\Leftrightarrow$ f' monoton nő (a, b)-n
b, f szigorúan konvex $\Leftrightarrow$ f' szigorúan monoton nő (a, b)-n.

49. Jellemezze egy függvény *konkávitását* a második derivált segítségével!
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$
$f \in \mathscr{D}^2(a, b)$:
a, f konvex $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0(a, b)$-n
b, f szigorúan konvex $\Leftarrow$ $f'' > 0(a, b)$ -n.

50. Mi az inflexiós pont definíciója?
$f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f \in \mathscr{D}(x_0)$. Ekkor az x_0 pont az f inflexiós pontja, ha az $l(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$. Az $l(x)$ függvény szigorúan előjelet vált x_0-ban, azaz $\exists\, \delta > 0$, hogy $l(x) < 0, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $l(x) > 0, \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$, vagy fordítva.

51. Milyen szükséges feltételt ismer a második derivált és az inflexiós pont kapcsolatáról?
$f : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \in (a, b)$
Ha f kétszer folytonosan deriválható x_0-ban, és x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.

52. Milyen elégséges feltételt ismer a harmadrendű derivált és az inflexiós pont kapcsolatáról?
$f : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \in (a, b)$
Ha f háromszor folytonosan derviálható, $f''(x_0) = 0$, és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0 inflexiós pont.

53. Definiálja a primitív függvényt!
Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény, ha $F \in \mathscr{D}(I)$ és $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I$

54. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye!
pl.: $f(x) = signx$, Nem létezik primitív függvénye, mert f nem Darboux tulajdonságú.

55. Definiálja az egy adott pontban eltűnő primitív függvény fogalmát!
$f : I \to \mathbb{R}$ függvény, $x_0 \in I$-ben eltünő primitiv függvénye $F = \int\limits_x f$, amelyre
$F' = f,\ F(x_0) = 0$.

56. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel!
Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor f *Darboux* tulajdonságú, azaz $\forall\, a, b \in I,\ a < b,\ \forall\, c \in (f(a), f(b))\, \exists\, \xi \in (a, b) : f(\xi) = c$.

57. Mit jelent egy függény határozatlan integrálja?
Ha $f : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye F, akkor $\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ az összes primitív függvény halmaza. $\int f$-et határozatlan integrálnak nevezzük.
Jel: $\int f = F + c,\ c \in \mathbb{R}, \quad \int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

58. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?
$f, g \in \mathscr{R}[a, b],\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $(\alpha_1 f + \alpha_2 g) \in \mathscr{R}[a, b]$, és $\int\limits_a^b (\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 \int\limits_a^b f + \alpha_2 \int\limits_a^b g$.

59. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?
Ha $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - a)^n, x \in K_R(a), R > 0$, akkor $\int f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \dfrac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + c$.

60. Mit mond ki a primitív fügvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?
$f, g : I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I,\ f, g \in \mathscr{D}(I)$. Ekkor ha $f'g$-nek létezik primitív függvénye, akkor fg'-nek is, és $\int fg' = fg - \int f'g$, és $\int\limits_{x_0} fg' = fg - f(x_0)g(x_0) - \int\limits_{x_0} f'g$.

61. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?
$g: I \to J, g \in \mathscr{D}(I),\ f: J \to \mathbb{R}, t_0 \in J.$ Ha f-nek létezik primitív függvénye, akkor $(f \circ g)g'$-nek is, és $\int\limits_{t_0} (f \circ g)g' = (\int\limits_{g(t_0)} f) \circ g.$

62. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt*!
$g: I \to J$ bijekció, $g \in \mathscr{D}(I),\ f: J \to \mathbb{R}, x_0 \in J.$ Ha $(f \circ g)g'$-nek létezik primitív függvénye, akkor f-nek is, és $\int\limits_{x_0} f = (\int\limits_{g^{-1}(x_0)} (f \circ g)g') \circ g^{-1}.$

63. Adjon meg legalább három olyan függvényt, amelyiknek primitív függvénye *nem elemi* függvény!
$\int \sin(x^2)dx,\ \int \cos(x^2)dx,\ \int \sqrt{1+x^2}dx.$

64. Definiálja az intervallum egy felosztását!
$\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a,b]$ egy felosztása, ha $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$

65. Mit jelent egy felosztás finomítása?
τ_1 és τ_2 felosztása $[a,b]$-nak. τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2.$

66. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?
$f \in K[a,b],\ \tau \in \mathscr{F}[a,b]:$
Az $s(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$ összeg az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

67. Mi a felső közelítő összeg definíciója?
$f \in K[a,b],\ \tau \in \mathscr{F}[a,b]:$
Az $S(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$ összeg az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

68. Mi történik egy alsó közelítő öszeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?
$f \in K[a,b],\ \tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{F}[a,b]$
Ha $\tau_2 > \tau_1$, akkor $s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2)$

69. Mi történik egy felső közelítő öszeggel, ha a neki megfelelő felsztást finomítjuk?
$f \in K[a,b],\ \tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{F}[a,b]$
Ha $\tau_2 > \tau_1$, akkor $S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$

70. Milyen viszony van az alsó és felső közelítő összegek között?
$f \in K[a,b],\ \tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{F}[a,b]$
$s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$

71. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?
$I_*f := \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathscr{F}[a,b]\} < \infty$ az f Darboux-féle alsó integrálja.

72. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?
$I^*f := \inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathscr{F}[a,b]\} \in \mathbb{R}$ az f Darboux-féle felső integrálja.

73. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?
f Riemann integrálható, ha $I_* f = I^* f$.
Jel: $f \in \mathscr{R}[a,b]$

74. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-) integrálját?

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = I_* f = I^* f = If$$

75. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$x \in [0,1]$
$f \notin \mathscr{R}[a,b]$, hiszen $s(f,\tau) = 0 \wedge S(f,\tau) = 1$.

76. Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?

$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$ az f oszcillációs összege.

77. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?
$f \in \mathscr{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \tau \in \mathscr{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

78. Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalensátfogalmazását!

$f \in \mathscr{R}[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = I \Leftrightarrow \exists\, (\tau_n)$ felosztássorozat, hogy $\lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I$.

79. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. Ekkor $f + g \in \mathscr{R}[a,b]$ és $\int\limits_a^b (f+g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$.

80. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. Ekkor $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.

81. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?
Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. Ekkor ha $|g(x)| > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, akkor $f/g \in \mathscr{R}[a,b]$.

82. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Legyen $c \in (a,b)$. Ekkor $f \in \mathscr{R}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathscr{R}[a,c]$ és $f \in \mathscr{R}[c,b]$. Ekkor $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

83. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?
$\mathscr{C}[a,b] \subset \mathscr{R}[a,b]$. (???)

84. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény $\Rightarrow A \in \mathscr{R}[a,b]$.

85. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?

$A \in \mathscr{R}[a,b]$ függvényt véges sok pontban megváltoztatva $\tilde{f}$-hoz jutunk. Ekkor $\tilde{f}$ is integrálható, és $\int\limits_a^b \tilde{f} = \int\limits_a^b f$.

86. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Ha $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, és $f \leq g$, akkor $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

87. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

Ha $f \in \mathscr{R}[a,b]$, akkor $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ és $|\int\limits_a^b f| \leq \int\limits_a^b |f|$.

88. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{R}[a,b], g \geq 0$. Ekkor

$m := \inf\limits_{[a,b]} f, M := \sup\limits_{[a,b]} f$, Ekkor $m \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b fg \leq M \int\limits_a^b g$.

89. Mi az integrálszámítás második középértéktétele?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{R}[a,b], g \geq 0, f \in \mathscr{C}[a,b]$. Ekkor $\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b fg = f(\xi) \int\limits_a^b g$.

90. Hogyan szól a *Newton-Leibniz-tétel*?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{R}[a,b]$ és f-nek $\exists F$ primitív függvénye. Ekkor $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

91. Definiálja az integrálfüggvényt!

$f \in \mathscr{R}[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Ekkor az $F(x) := \int\limits_{x_0}^x f \ (x \in [a,b])$ függvény f az integrálfüggvénye.

92. Fogalmazza meg a differenciál- és integrálszámítás alaptételét!

Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{R}[a,b], x_0 \in [a,b]$ és $F(x) = \int\limits_{x_0}^x f$ az f integrál függvénye. Ekkor

i, $F \in \mathscr{C}[a,b]$
ii, Ha $d \in [a,b]$, és $f \in \mathscr{C}(d)$, akkor $F \in \mathscr{D}(d)$ és $F'(d) = f(d)$.

93. Mit ért parciális integráláson a Riemann-integrálokkal kapcsolatban?

$f, g \in \mathscr{D}[a,b], f'g' \in \mathscr{R}[a,b]$. Ekkor $\int\limits_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b fg'$.

94. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra vonatkozóan?

$f \in \mathscr{R}[a,b], g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, $g \in \mathscr{D}[\alpha, \beta]$, $f \circ gg' \in \mathscr{R}[a,b]$. Ekkor

$\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int\limits_a^b (f \circ gg')$.

95. Mit tud mondani függvénygrafikon hosszának a kiszámításáról?

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$.

96. Hogyan számítja ki forgástest térfogatát?

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $V(H) = \pi \int\limits_a^b f^2$.

97. Hogyan számítja ki forgástest felszínét?

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $F(H) = 2\pi \int\limits_a^b f\sqrt{1 + (f')^2}$.

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzetem
- Szili László: Analízis Feladatokban I.
- Wikipédia