ANALÍZIS II. VIZSGAKIDOLGOZÁS (2013 ŐSZI FÉLÉV)

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2014. január 19.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Az $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény tulajdonságai. A logaritmus és a hatvány értelmezése

1.1. Valós exponenciális függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen $\exp := \exp\big|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol

$$\exp x := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

TÉTEL (TULAJDONSÁGAI): Az $\exp = \exp\big|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ függvény egy szigorúan monoton növő, folytonos bijekció, amelyre

$$\lim_{+\infty} \exp = +\infty, \ \lim_{-\infty} \exp = 0.$$

1.2. Logaritmusfüggvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen $\ln := \exp^{-1} = \exp_{|\mathbb{R}}^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ahol

$$\ln(\exp t) = t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

TÉTEL (TULAJDONSÁGAI): Az $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ logaritmusfüggvény egy szigorúan monoton növő, folytonos bijekció, amelyre

$$\lim_{+\infty} \ln = +\infty, \ \lim_{0} \ln = -\infty.$$

1.3. Hatvány függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, $h_\mu\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$h_\mu(x) := x^\mu \quad (x > 0).$$

Tehát

$$h_\mu(x) = \exp(\mu \ln x) = e^{\mu \ln x} \quad (x > 0).$$

TÉTEL (TULAJDONSÁGAI): Legyen $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, ekkor a $h_\mu\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció, amely $\mu > 0$ esetén szigorúan monoton növő, és

$$\lim_{+\infty} h_\mu = +\infty, \ \lim_{0} h_\mu = 0,$$

$\mu < 0$ esetén szigorúan monton fogyó, és

$$\lim_{+\infty} h_\mu = 0, \ \lim_{0} h_\mu = +\infty.$$

2. Differenciálhatóság fogalma, ekvivalens átfogalmazás, kapcsolata a folytonossággal

2.1. Differenciálhatóság fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor f differenciálható az a pontban ($f \in D\{a\}$), ha $\exists\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \eta \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}:$

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

és $\lim\limits_{a} \eta = 0$.

ÁLLÍTÁS: Tegyük fel, hogy $f \in D\{a\} \Rightarrow \exists! A$ (A differenciálhatóság definíciójában szereplő A).

BIZONYÍTÁS: Ha a definícióban szereplő A és η helyett $B \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ esetén is igaz a definíció, akkor az

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

egyenlőséget felírva B, ε-ra egy kivonás után kapjuk:

$$(A-B)(x-a) = (\varepsilon(x) - \eta(x))(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

azaz

$$A - B = \varepsilon(x) - \eta(x) \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f).$$

Mivel $\varepsilon(x) - \eta(x) \to 0$ $(x \to a) \Rightarrow A = B$. $\square$

2.2. Derivált értelmezése

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in D\{a\}$ függvény. A differenciálhatóság definíciójában szereplő A az f függvény a-beli deriváltjának nevezzük, és $f'(a)$ szimbólummal jelöljük. Ez a jelölés arra utal, hogy ha

$$\{z \in \mathcal{D}_f : f \in D\{z\}\} \neq \emptyset,$$

akkor $f'(a)$ a

$$\{z \in \mathcal{D}_f : f \in D\{z\}\} \ni z \mapsto f'(z)$$

függvény a-beli helyettesítési értéke. A most értelmezett függvény az f deriváltfüggvényének nevezzük és f'-vel jelöljük.

2.3. Ekvivalens átfogalmazás

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $\Delta_a f \colon \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ (differenciahányados függvény), ahol $\Delta_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f)$.

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. $f \in D\{a\} \Leftrightarrow \exists \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$ és $f'(a) = \lim\limits_a \Delta_a f$.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy $f \in D\{a\}$. Így

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim\limits_a \eta = 0$. Ezért

$$\Delta_a f(x) - f'(a) = \eta(x) \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f),$$

Amiből $\lim\limits_a \eta = 0$ miatt $\lim\limits_a (\Delta_a f - f'(a)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_a \Delta_a f = f'(a)$.

$\Leftarrow$ Fordítva, most azt tegyük fel, hogy $\exists\, A := \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$, és legyen

$$\eta(x) := \Delta_a f(x) - A \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f),$$

Így $\exists \lim\limits_a \eta = \lim\limits_a (\Delta_a f - A) = 0$ és

$$f(x) - f(a) = (x-a)\Delta_a f(x) = A(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f).$$

Tehát $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A = \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$. $\square$

2.4. Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\} \Rightarrow f \in C\{a\}$.

BIZONYÍTÁS:
$f(x) - f(a) = f'(a) \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + \eta(x) \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \quad (x \in \mathcal{D}_f) \Rightarrow f(x) - f(a) \to 0\, (x \to a)$, azaz

$$\exists \lim_a f = f(a) \Rightarrow f \in C\{a\}. \qquad \square$$

3. Differenciálható függvények műveletei

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$, $f, g \in D\{a\}$. Ekkor

1. $f + g \in D\{a\}$, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $\forall\, c \in \mathbb{R} : cf \in D\{a\}$, és $(cf)'(a) = cf'(a)$,
3. $f \cdot g \in D\{a\}$, és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in D\{a\}$, és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$.

BIZONYÍTÁS:

1.

$$\lim_a \Delta_a(f+g) = \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) = \lim_a (\Delta_a f + \Delta_a g) =$$

$$= \lim_a \Delta_a f + \lim_a \Delta_a g = f'(a) + g'(a).$$

2.

$$\lim_a \Delta_a(cf) = \lim_{x\to a} \frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} = c \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c \cdot \lim_a \Delta_a f = c \cdot f'(a).$$

3.

$$\lim_a \Delta_a(f\cdot g) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) = \lim_a (g\cdot\Delta_a f + f(a)\cdot\Delta_a g) =$$

$$= (\lim_a g)(\lim_a \Delta_a f) + f(a)(\lim_a \Delta_a g) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

(Mivel $g \in D\{a\} \Rightarrow g \in C\{a\} \Rightarrow \lim_a g = g(a)$).

4.

$$\lim_a \Delta_a \left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{x-a)} \cdot \frac{1}{g(x)\cdot(g(a)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(x)\cdot g(a)} \cdot \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a) \right) \right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(x)\cdot g(a)} \cdot \left(g(a)\cdot\Delta_a f(x) - f(a)\Delta_a \cdot g(x) \right) \right) =$$

$$= \left(\lim_a \frac{1}{g(x)\cdot g(a)} \right) \cdot \left(g(a)\cdot\lim_a \Delta_a f - f(a)\cdot\lim_a \Delta_a g \right) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}. \qquad \square$$

4. Differenciálható függvények kompozíciója

TÉTEL: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, $g \in D\{a\}$, $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor

$$f \circ g \in D\{a\} \text{ és } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

BIZONYÍTÁS:

$$g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_g),$$

ahol $\lim\limits_{a} \eta = \eta(a) = 0$, illetve

$$f(y) - f(g(a)) = f'(g(a))(y - g(a)) + \varepsilon(y)(y - g(a)) \quad (y \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim\limits_{g(a)} \varepsilon = \varepsilon(g(a)) = 0$. Tehát

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{f,g} : f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \varepsilon(g(x))(g(x) - g(a)) =$$

$$= f'(g(a))\Big(g'(a)(x-a) + \eta(x)(x-a)\Big) + \varepsilon(g(x))(g'(a)(x-a) + \eta(x)(x-a)) =$$

$$= \underbrace{f'(g(a))(g'(a))}_{=:A}(x-a) + (x-a)\underbrace{\Big(f'(g(a))\eta(x) + \varepsilon(g(x))(g'(a) + \eta(x))\Big)}_{=\delta(x)} =$$

$$= A(x-a) + \delta(x)(x-a) = f \circ g(x) - f \circ g(a),$$

ahol $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (g'(a) + \eta(x)) = g'(a)$,
illetve $g \in C\{a\}$ és $\varepsilon \in C\{g(a)\} \Rightarrow \varepsilon \circ g \in C\{a\} \Rightarrow \lim\limits_{a} \varepsilon \circ g = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(g(x)) = \varepsilon(g(a)) = 0$. $\square$

5. Hatványsor összegfüggvényének deriváltja, Többször differenciálható függvények, Taylor-sor

5.1. Hatványsor összegfüggvényének deriváltja

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $\sum(a_n(t-a)^n)$ hatványsor r konvergenciasugara nem 0, és legyen $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{K},\ |x-a| < r)$. Ekkor $f \in D$, és

$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1} \quad (x \in \mathbb{K},\ |x-a| < r).$$

BIZONYÍTÁS: Lássuk be először, hogy $f \in D\{a\}$ és

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1.$$

Valóban,

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_1(x-a) + (x-a)\sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-a)^{n-1} =$$

$$a_1(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathbb{K},\ |x-a| < r),$$

ahol a

$$c_n := \begin{cases} 0 & (n=0) \\ a_{n+1} & (n \geq 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

együtthatókkal

$$\eta(x) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{K},\ |x-a| < r).$$

Így

$$\exists \lim_a \eta = \eta(a) = c_0 = 0$$

határérték, amiből definíció alapján következik, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = a_1$.
Legyen most $b \in \mathbb{K}$, $|b-a| < r$. Így

$$\exists\, b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b-a)^{n-k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

sorösszegek, és

$$\forall\, \rho \in (0, r - |b-a|) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k \quad (x \in \mathbb{K}_\rho(b)).$$

Ha tehát

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-b)^k \quad (x \in \mathbb{K}_\rho(b)),$$

akkor a bizonyítás első része alapján $g \in D\{b\}$, és

$$g'(b) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} a_n (b-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}.$$

Ugyanakkor $f(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{K}_\rho(b))$, ezért $f \in D\{b\}$, és $f'(b) = g'(b)$. □

5.2. Többször differenciálható függvények

5.2.1. Kétszer deriválható függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. f függvény az a-ban kétszer differenciálható, ha $\exists\, r > 0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$, és $f' \in D\{a\}$. Jelölése: $f \in D^2\{a\}$. Legyen ekkor $f''(a) := (f')'(a)$ az f függvény a-beli második deriváltja.

5.2.2. Többször deriválható függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $1 \leq n \in \mathbb{N}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor az f függvény az a-ban (n+1)-szer deriválható, ha $\exists\, r > 0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D^n\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r))$, és $f^{(n)} \in D\{a\}$. Jelölése: $f \in D^{n+1}\{a\}$. Legyen ekkor $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$ az f függvény a-beli (n+1)-edik deriváltja.

5.2.3. Végtelensokszor deriválható függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $\forall\, 1 \leq n \in \mathbb{N} : f \in D^n\{a\}$, akkor az f függvény az a pontban ∞-sokszor deriválható. Jelölése: $f \in D^\infty\{a\}$.
Ha $\forall a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz az utóbbi, akkor f függvény ∞-szokszor deriválható. Jelölése $f \in D^\infty$.

5.3. Taylor sor fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D^\infty\{a\}$, és $a_n := \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum(a_n(x-a)^n)$ hatványsor az f függvény a-beli Taylor-sora, a_n pedig az f függvény a-beli n-edik Taylor együtthatója $(n \in \mathbb{N})$.

$$T_{a,n}f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N})$$

az f a-beli n-edik Taylor polinomja.

6. Az inverz függvény deriváltja. Az exponenciális-, a logaritmus- és a hatvány-függvények deriválása

6.1. Inverz függvény deriváltja

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ invertálható függvény, $a \in \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$,
$f'(a) \neq 0, f(a) \in \operatorname{int} \mathcal{R}_f, f^{-1} \in C\{f(a)\}$. Ekkor $f^{-1} \in D\{f(a)\}$ és

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

BIZONYÍTÁS: Belátjuk:

$$\lim_{f(a)} \Delta_{f(a)} f^{-1} = \frac{1}{f'(a)} \underset{\text{hat.ért. von. átv. elv}}{\Leftrightarrow} f(a) \neq \underbrace{y_n}_{=f(x_n)} \in \mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és $\lim (y_n) = f(a)$, ahol

$$a \neq x_n \in \mathcal{D}_f \underset{\text{folyt. von. átv. elv}}{\Rightarrow} \exists \lim (f^{-1}(f(x_n))) = \lim (x_n) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Tehát:

$$\Delta_{f(a)} f^{-1}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} = \frac{1}{\Delta_a f(x_n)},$$

ahol (átviteli elv)

$$\exists \lim (\Delta_a f(x_n)) = \lim_a \Delta_a f = f'(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta_a f(x_n)} \to \frac{1}{f'(a)} \ (n \to \infty).$$

Tehát $\Delta_{f(a)} f^{-1}(y_n) \to \dfrac{1}{f'(a)} \quad (n \to \infty).$ □

6.2. Exponenciális függvény deriváltja

$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$. Ekkor $\exp \in D$ és

$$\exp' x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

6.3. Logaritmusfüggvény deriváltja

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists \exp^{-1} = \ln$. Ekkor $\ln \in D$ és

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(lnx)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

6.4. Hatvány függvény deriváltja

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha \quad (x > 0)$ azaz $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \ln x)$. Ekkor $f_\alpha \in D$ és

$$f'_\alpha(x) = \exp'(\alpha \ln x)(\alpha \ln)'(x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

7. A lokális monotonitás és szélsőérték fogalma. Szükséges és elégséges feltételek differenciálható függvény esetén

7.1. Lokális szélsőérték

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f-nek az a helyen lokális maximuma van, ha

$$\exists\, r > 0 : f(x) \leq f(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < r),$$

és lokális minimuma van, ha

$$\exists\, r > 0 : f(x) \geq f(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < r).$$

Ha f-nek az a-ban lokális maximuma, vagy lokális minimuma van, akkor lokális szélsőértéke van a-ban.

7.2. Lokális monotonítás

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f az a helyen lokálisan növekedő, ha $\exists\, r > 0 : (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f$ és

$$f(x) \leq f(a) \leq f(t) \quad (a - r < x \leq a \leq t < a + r),$$

és lokálisan csökkenő, ha $\exists\, r > 0 : (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_f$ és

$$f(x) \geq f(a) \geq f(t) \quad (a - r < x \leq a \leq t < a + r).$$

Ha f az a-ban lokálisan növekedő, vagy lokálisan csökkenő, akkor lokálisan monoton.

7.3. Elsőrendű szükséges feltétel

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$. Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy f-nek a-ban lokális maximuma van (lokális minimum esetén analóg a bizonyítás). Tehát

$$\exists\, r > 0 : f(x) \leq f(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < r).$$

Ekkor $\exists\, f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \\ \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \underbrace{\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\leq 0} \Rightarrow$$

$f'(a) = 0$. $\square$

7.4. Elsőrendű elégséges feltétel

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és
$\exists\, r > 0 : f \in D\{x\} \quad (x \in (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f)$. Ekkor, ha

1. az f' deriváltfüggvénynek az a-ban $(+,-)$ jelváltása van, akkor az f-nek az a-ban lokális maximuma van,
2. az f' deriváltfüggvénynek az a-ban $(-,+)$ jelváltása van, akkor az f-nek az a-ban lokális minimuma van,

BIZONYÍTÁS: Pl. legyen az f'-nek a-ban $(+,-)$ jelváltása ($(-,+)$ eset analóg módon). Ekkor

$$\exists\, \rho,\, 0 < \rho \le r : f'(x) \ge 0 \ge f'(t) \quad (a-\rho < x < a < t < a+\rho).$$

Ha $\varphi(z) := f(z) \quad (a-\rho < z \le a)$, akkor φ függvény folytonos, $\varphi \in D\{z\}$, és
$\varphi'(z) = f'(z) \ge 0 \quad (a-\rho < z < a)$. Ezért

$$f(z) = \varphi(z) \le \varphi(a) = f(a) \quad (a-\rho < z \le a).$$

Hasonló meggondolással kapjuk, hogy

$$f(a) \ge f(t) \quad (a \le t < a+\rho).$$

Tehát $f(x) \le f(a) \quad (x \in (a-\rho, a+\rho))$, vagyis az f-nek az a helyen lokális maximuma van. $\square$

7.5. Másodrendű elégséges feltétel

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D^2\{a\}$, $f'(a) = 0, f''(a) \ne 0$, akkor az f-nek a-ban szigorú lokális szélsőértéke van.
Ha $f''(a) > 0$ akkor a-ban lokális minimuma van,
Ha $f''(a) < 0$ akkor a-ban lokális maximuma van.

BIZONYÍTÁS: Pl $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$ analóg módon), azaz

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x-a} > 0 \Rightarrow \exists\, r > 0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$$

és $\forall x \in (a-r, a+r),\ x \ne a :$

$$\frac{f'(x)}{x-a} > 0 \begin{cases} f'(x) > 0 & (a < x < a+r) \\ f'(x) < 0 & (a-r < x < a) \end{cases}$$

Ebből következik, hogy f' jelet vált a-ban: $- \nearrow + \Rightarrow$ a-ban lokális minimuma van. $\square$

8. Rolle-, Cauchy-, Lagrange-féle középérték-tételek

8.1. Rolle-féle középérték-tétel

TÉTEL: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C$, $\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$, $f(a) = f(b)$. Ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

BIZONYÍTÁS: Weierstrass-tétel szerint $\exists\, u, v \in [a, b] : f(u) = \min \mathcal{R}_f$, $f(v) = \max \mathcal{R}_f$.
Ha $f(u) = f(v)$, akkor f konstansfüggvény, így $\forall\, \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.
Ha $f(u) \neq f(v)$, akkor $u \in (a, b)$ vagy $v \in (a, b)$. Legyen pl. $u \in (a, b)$. Ekkor

$$\xi := u \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = (a, b),$$

és az f-nek ξ-ben lokális minimuma van. A feltételeink szerint $f \in D\{\xi\} \underset{\text{elsőrendű szüks. felt.}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$. $\square$

8.2. Lagrange-féle középérték-tétel

TÉTEL: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C$, $\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$. Ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x \quad (x \in [a, b])$. Ekkor F-re alkalmazható a Rolle-tétel:

$$\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

8.3. Cauchy-féle középérték-tétel

TÉTEL: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f, g \in C$, $\forall x \in (a, b) : f, g \in D\{x\}$. Ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

BIZONYÍTÁS:

$$F(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Ekkor F-re alkalmazható a Rolle-tétel:

$$\exists \xi \in (a, b) : 0 = F'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi) \qquad \square.$$

9. Taylor-formula (Lagrange-féle maradéktag)

TÉTEL: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in D^{n+1}$. Ekkor $\forall\, a \neq x \in I$, $\exists\, \xi \in (a,x)$ vagy $\xi \in (x,a)$:

$$f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_{a,n}f(x)} = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrange-maradék}} .$$

BIZONYÍTÁS:
Legyen $\delta := \dfrac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ és $F(t) := f(t) - T_n f(t) - \underbrace{\delta \cdot (t-a)^{n+1}}_{:=h} \quad (t \in I) \Rightarrow F \in D^{n+1}$
és

$$F^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) - (T_n f)^{(j)}(t) - h^{(j)}(t) \quad (t \in I)$$

Ebből következik, hogy $F(a) = 0 = F(x) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, \xi_1 \in (a,x)$ vagy $\xi_1 \in (x,a)$:
$F'(\xi_1) = 0 \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, \xi_2 \in (a, \xi_1)$ vagy $\xi_2 \in (\xi_1, a)$: $F''(\xi_2) = 0$, de $F''(a) = 0$ és így tovább:
$\exists\, \xi_{n+1} \in (a, \xi_n)$ vagy $\xi_{n+1} \in (\xi_n, a)$:
$F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot \delta \Rightarrow \delta = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ $\square$.

10. Differenciálható függvények monotonítása. A derivált függvény Darboux-tulajdonságú

10.1. Differenciálható függvények monotonítása

10.1.1. Monotonítás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum, $f \in D$. Ekkor

1. f monoton növő $\Leftrightarrow f' \geq 0$,
2. f monoton fogyó $\Leftrightarrow f' \leq 0$.

BIZONYÍTÁS: Nézzük az 1. esetet (2. eset hasonlóan):

"$\Rightarrow$" $a \in \mathcal{D}_f$, $a \neq x \in \mathcal{D}_f$: $\Delta_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ hiszen

- ha $a < x \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ és $x - a > 0$,
- ha $x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ és $x - a < 0$.

Ebből következik, hogy $f'(a) = \lim\limits_{a} \Delta_a f \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0$.

"$\Leftarrow$" Legyen $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$. Ekkor a Lagrange-tétel miatt:

$$\exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \geq 0$$

és $b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a) \Rightarrow f \nearrow$. $\square$

10.1.2. Szigorú monotonítás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum, $f \in D$. Ekkor

1. f szigorúan monoton növő $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $(x \in \mathcal{D}_f)$, $\forall\, I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt interallumra:

$$\exists\, t \in I : f'(t) > 0,$$

2. f szigorúan monoton fogyó $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $(x \in \mathcal{D}_f)$, $\forall\, I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt interallumra:

$$\exists\, t \in I : f'(t) < 0.$$

BIZONYÍTÁS: Nézzük az 1. állítást. (a 2. állítás analóg módon)

"$\Rightarrow$" Ha $f \uparrow \Rightarrow f \nearrow \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f)$.
Indirekt tegyük fel, hogy egy $I \subset \mathcal{D}_f$ nyílt intervallumra: $f'(x) = 0 \quad (x \in I)$. Ekkor a

$$\varphi(x) := f(x) \quad (x \in I)$$

függvény konstansfüggvény. Így $\forall x, t \in I,\ x \neq t : \varphi(x) = f(x) = \varphi(t) = f(t)$, ami ellentmond az f szigorú monotonításának.

"$\Leftarrow$" Indirekt módon tegyük fel, hogy az f nem szigorúan monoton növő. Mivel a feltétel szerint $f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$. Ebből következik, hogy valamilyen $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b : f(a) = f(b)$, és $\forall a < t < b : f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ miatt

$$f(a) = f(t) = f(b).$$

Így

$$\varphi(x) := f(x) \quad (x \in (a, b))$$

függvény konstansfüggvény. Ezért $\varphi'(x) = f'(x) = 0 \quad (x \in (a, b))$, ami elletmond, hogy $\forall\, I \subset \mathcal{D}_f : \exists\, t \in I : f'(t) > 0.$ $\square$

10.2. Derivált függvény Darboux-tulajdonságú

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D$, $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum. Ekkor az f' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú.

BIZONYÍTÁS:
Be kell látnunk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathcal{D}_f, a < b$ és $\forall y \in (f'(a), f'(b)), \exists\, v \in [a, b] : f'(v) = y$. Feltehető, hogy $f'(a) \neq f'(b)$ és $f'(a) < y < f'(b)$. Tekintsük a

$$\varphi(x) := f(x) - yx \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in D$, így

$$\varphi \in C \underset{Weirs.-tétel}{\Rightarrow} \exists\, v \in [a, b] : \varphi(v) = \min\{\varphi(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Mivel $\varphi'(x) = f'(x) - y \quad (x \in \mathcal{D}_f)$, ezért $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$. Tehát

$$\varphi'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,$$

így

$$\exists\, r > 0 : \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0 \quad (a < x < a + r < b).$$

Az itt szereplő $x \in (a, a + r)$ helyeken $x - a > 0 \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(a) < 0$, azaz

$$\varphi(x) < \varphi(a) \quad (a < x < a + r).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) = f'(b) - y > 0$$

miatt valamilyen $\rho > 0$ mellett $\varphi(x) - \varphi(b) < 0$, azaz

$$\varphi(x) < \varphi(b) \quad (a < b - \rho < x < b).$$

Így mondhatjuk, hogy $a < v < b$. Ezért $\exists\, \sigma > 0 : (v - \sigma, v + \sigma) \subset (a, b)$ és

$$\varphi(v) \leq \varphi(x) \quad (x \in (v - \sigma, v + \sigma)).$$

Vagyis a φ függvénynek a v-ben lokális minimuma van. Tehát $\varphi'(v) = f'(v) - y = 0$, azaz $y = f'(v)$. $\square$

11. A L'Hospital szabály ($\lim_a f = \lim_a g = 0,\ a \in \mathbb{R}$) eset bizonyítása

TÉTEL: Legyen $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in D$. Tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:

1. $g'(x) \neq 0 (a < x < b)$,
2. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$, vagy $\lim\limits_a f = \pm\infty$ és $\lim\limits_a g = \pm\infty$,
3. $\exists\, A := \lim\limits_a\, (f'/g')$ határérték.

Ekkor $\exists \lim\limits_a (f/g)$ és $\lim\limits_a (f/g) = A$. Igaz akkor is ha a 2., 3., feltételben a helyére b-t írunk. Ekkor $\exists \lim\limits_b (f/g)$ és $\lim\limits_b (f/g) = A$.

BIZONYÍTÁS: ($\lim_a f = \lim_a g = 0$, $a \in \mathbb{R}$ eset):
Ha $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists\, d \in (a, b) : \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.
Legyen $a < x < d$, és $F, G\colon [a, x] \to \mathbb{R}$:

$$F(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ f(t) & (a < t \leq x) \end{cases}, G(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ g(t) & (a < t \leq x) \end{cases}.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a F = \lim_a f = 0 = F(a),\ \exists \lim_a G = \lim_a g = 0 = G(a).$$

Így $F, G \in C\{a\}$ és $F, G \in C\{x\}$. Továbbá $\forall t \in (a, x) : F, G \in D\{t\}$, és
$F'(t) = f'(t)$, $G'(t) = g'(t) \neq 0 \underset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Mivel $a < \xi < d$ ezért $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.
Ez az jelenti, hogy $\exists \lim\limits_a (f/g) = A$. $\square$

12. Konvex, konkáv függvények. A differenciahányados függvény monotonitása(szükséges és elégséges feltétel)

12.1. Konvex, konkáv függvény

DEFINÍCIÓ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény konvex, ha

$$\forall\, a, b \in I,\ \forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

konkáv, ha

$$\forall a, b \in I\ \forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

12.2. Diferenciahányados függvény monotonítása

TÉTEL: Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow \forall\, a \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f \nearrow$,
2. f konkáv $\Leftrightarrow \forall\, a \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f \searrow$.

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy f konvex. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $x, t \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ x < t$. Ekkor három eset lehetséges:

1. $a < x < t$, ekkor a
$$\lambda := \frac{t-x}{t-a} \in (0,1),$$
számmal $x = \lambda a + (1-\lambda)t$, így f feltételezett konvexitása miatt
$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(t) - f(a)}{\lambda a + (1-\lambda)t - a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \Delta_a f(t),$$
így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$.
2. $x < t < a$, ekkor a
$$\lambda := \frac{a-t}{a-x} \in (0,1)$$
számmal $t = \lambda x + (1-\lambda)a$, így f feltételezett konvexitása alapján most $t - a < 0$ miatt
$$\Delta_a f(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(a) - f(a)}{\lambda x + (1-\lambda)a - a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \Delta_a f(x),$$
így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$,
3. $x < a < t$, amikor vegyük észre, hogy
$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \Delta_x f(a).$$
Így az 1. esetet figyelembe véve ($x \longleftrightarrow a$ cserével)
$$\Delta_x f(a) \leq \Delta_x f(t) = \Delta_t f(x),$$
amiből a 2. szerint ($t \longleftrightarrow a$ cserével):
$$\Delta_t f(x) \leq \Delta_t f(a) = \Delta_a f(t)$$
Tehát $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$.

Ezzel beláttuk a $\Rightarrow$ irányt. Mutassuk meg a $\Leftarrow$ irányt, amihez tegyük fel, hogy $\forall\, a \in \mathcal{D}_f :$ $\Delta_a f \nearrow$.
Legyen $u, v \in \mathcal{D}_f,\ u < v$ és $0 \leq \lambda \leq 1$. Mivel az
$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$

egyenlőtlenség $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$ esetén triviális, így feltehető: $0 < \lambda < 1$. Legyen $c := \lambda u + (1-\lambda)v$, így $u < c < v$, tehát a $\Delta_c f$ függvény monoton növekedése alapján

$$\Delta_c f(u) = \frac{f(u)-f(c)}{u-c} = \frac{f(u)-f(c)}{(1-\lambda)(u-v)} \leq \Delta_c f(v) = \frac{f(v)-f(c)}{v-c} = \frac{f(v)-f(c)}{\lambda(v-u)}.$$

Így

$$\lambda(f(c)-f(u)) \leq (1-\lambda)(f(v)-f(c)),$$

tehát

$$f(c) = f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

adódik. Vagyis az f függvény konvex (2. állítás analóg módon). □

13. A konvexitás (konkávítás) jellemzése differenciálható függvények esetén: a deriváltfüggvény monotonítása, a függvény és az érintők viszonya

13.1. A konvexitás jellemzése differenciálható függvények esetén

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f \in D$. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow$,
2. f konkáv $\Leftrightarrow f' \searrow$.

BIZONYÍTÁS: 1. rész bizonyítása (2. analóg módon): Tegyük fel, hogy f konvex. Ekkor a differenciahányados monotonítása tétel miatt

$$\forall\, a \in I : \Delta_a f \nearrow .$$

Legyen $a, b \in I$, $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$. Ugyanis

$$f'(a) = \lim_a \Delta_a f = \lim_{a+0} \Delta_a f = \inf\{\Delta_a f(x) : a < x \in I\} \leq$$

$$\leq \Delta_a f(b) = \Delta_b f(a) \leq \sup\{\Delta_b f(t) : I \ni t < b\} = \lim_{b-0} \Delta_b f =$$

$$= \lim_b \Delta_b f = f'(b) \Rightarrow f' \nearrow .$$

Most tegyük fel, hogy $f' \nearrow$.
Legyen $a, b \in I$, $a < b$. Ekkor a Lagrange-középérték miatt

$$\exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Tekinstük az

$$F(x) := f(a) + f'(\xi)(x-a) - f(x) \quad (x \in (a,b))$$

függvényt. Ha $\lambda \in [0,1]$, akkor $c := \lambda a + (1-\lambda)b$ jelöléssel

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) = F(c).$$

Az f konvexitásához elég belátni, hogy $F(c) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$. Világos, hogy $F \in D\{x\}$ és

$$F'(x) = f'(\xi) - f'(x) \quad (x \in (a,b)),$$

Ezért f monoton növekedése miatt

$$F'(x) \geq 0 \quad (a < x < \xi),\ F'(x) \leq 0 \quad (\xi < x < b).$$

Ezért az $F\Big|_{[a,\xi]}$ függvény monoton növekedő, az $F\Big|_{[\xi,b]}$ pedig monoton fogyó.
Így $F(a) = F(b) = 0$ egyenlőségek alapján következik, hogy $F(x) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$ $\square$.

13.2. A függvény és az érintők viszonya

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_a f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

az f függvény a-beli értinője.

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset R$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f \in D$. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow \forall\, a \in I : f \geq e_a f$,
2. f konkáv $\Leftrightarrow \forall\, a \in I : f \leq e_a f$.

BIZONYÍTÁS: 1. rész bizonyítása (2. analóg módon): Tegyük fel, hogy f konvex. Ekkor a konvexitás és deriváltfüggvény kapcsolatáról szóló tétel alapján $f' \nearrow$. Legyen $a \in I$ és

$$F(x) := f(x) - e_a f(x) \quad (x \in I).$$

Ekkor $F \in D$ és $F'(x) = f'(x) - f'(a) \quad (x \in I)$. Világos, hogy $F'(a) = 0$ és f' monoton növekedése miatt

$$F'(x) \leq 0 \leq F'(t) \quad (x, t \in I,\ x \leq a \leq t).$$

Tehát $F\Big|_{(-\infty,a]\cap I} \searrow$, $F\Big|_{[a,+\infty)\cap I} \nearrow$. Mivel $F(a) = 0$ ezért $F(x) \geq 0 \quad (x \in I)$. Vagyis

$$f(x) \geq e_a f(x) \quad (x \in I).$$

Ha az utóbbi ($\forall a \in I$ -re feltételezett) egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor adódik f' monoton növekedése. Legyen $a, b \in I$, $a < b$. Ekkor

$$f(b) \geq e_a f(b) = f(a) + f'(a)(b-a)$$

és

$$f(a) \geq e_b f(a) = f(b) + f'(b)(a-b).$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$f(b) + f(a) \geq f(a) + f(b) + (f'(a) - f'(b))(b-a) \Rightarrow 0 \geq f'(a) - f'(b) \Rightarrow f'(a) \leq f'(b). \qquad \square$$

14. Inflexió. Szükséges és elégséges feltételek (a derivált szélsőértéke, magasabb rendű deriváltak)

14.1. Inflexió fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$. Ha $f - e_a f$ függvény jelet vált a-ban, akkor az f függvénynek az a helyen inflexiója van.

14.2. Elégséges feltétel (derivált szélsőértéke)

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$. Ha f'-nek az a-ban lokális szélsőértéke van, akkor az f-nek az a-ban inflexiója van.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az

$$F(x) := f(x) - e_a f(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényt. Ha $r > 0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$ és $\forall x \in (a-r, a+r) : f \in D\{x\}$, akkor $F \in D\{x\} \quad (x \in a-r, a+r)$ is igaz és

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) \quad (x \in (a-r, a+r)).$$

Legyen pl a lokális maximumhelye f'-nek (lokális minimumhely analóg módon), akkor

$$\exists\, \rho \in (0, r] : f'(x) \leq f'(a) \quad (x \in (a-\rho, a+\rho)).$$

Tehát

$$f'(x) - f'(a) \leq 0 \quad (x \in (a-\rho, a+\rho)).$$

Ez a differenciálható függvények monotonításáról szóló tétel alapján: $F\Big|_{(a-\rho, a+\rho)}$ leszűkített függvény monoton fogyó. Mivel $F(a) = 0$, ezért

$$F(x) \geq 0 \geq F(t) \quad (a - \rho < x \leq a \leq t < a + \rho).$$

Tehát F az a-ban jelet vált, így f-nek az a-ban inflexiója van. □

14.3. Elégséges feltétel (magasabb rendű derivált)

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D^3\{a\}$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$. Ekkor az f-nek az a-ban inflexiója van.

BIZONYÍTÁS: $(f')'(a) = 0$, $(f')''(a) \neq 0$ és ld. másondrendű elégséges feltétel. □

14.4. Szükséges feltétel (magasabb rendű derivált)

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D^n\{a\}$, és

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1),\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ekkor

1. Ha n páros, akkor f-nek az a-ban szigorú lokális szélsőértéke van ($f^{(n)}(a) > 0$ esetén lokális minimum, $f^{(n)}(a) < 0$ esetén lokális maximum),
2. Ha n páratlan, akkor f-nek az a-ban inflexiója van.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel pl., hogy $(f^{(n-1)})'(a) = f^{(n)}(a) > 0$. Ekkor az $f^{(n-1)}$ az a-ban szigorúan lokálisan növekedő. Mivel $f^{(n-1)}(a) = 0$ ezért

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : f^{(n-1)}(x) < 0 < f^{(n-1)}(t) \quad (x, t \in K(a),\ x < a < t).$$

Ez azt is jelenti, hogy $f^{(n-1)} = (f^{(n-2)})'$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$ jelváltása van. Így $f^{(n-2)}$-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van. A feltételink miatt ugyanakkor $f^{(n-2)}(a) = 0$, tehát

$$\exists\, \widetilde{K}(a) \subset \mathcal{D}_f : (f^{(n-3)})'(x) = f^{(n-2)}(x) > 0 \quad (a \neq x \in \widetilde{K}(a)).$$

A differencálható függvények szigorú monotonítására vonatkozó tétel alapján a $\widetilde{K}(a)$ környezeten az $f^{(n-3)} \uparrow$, speciálisan szigorúan lokálisan monoton növő is (feltéve, hogy $n \geq 3$).
Az eljárást rekurzívan folytatva kapjuk, hogy (pl.) $f^{(n)}(a) > 0$ esetén $f^{(n-2j-1)}$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$ jelváltása, $f^{(n-2k)}$-nak az a-ban szigorú lokális minimuma van (hacsak a $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \in \mathbb{N}$ számokra $n - 2j - 1 \geq 0$, illetve $n - 2k \geq 0$ teljesül). Ha tehát $n = 2N$ alakú (valamilyen $1 \leq N \in \mathbb{N}$-re), akkor a $k = N$ választással kapjuk, hogy az $f^{(n-2N)} = f^{(0)} = f$ függvénynek az a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha viszont $n = 2M+1$ (valamilyen $1 \leq M \in \mathbb{N}$-re), akkor $j = M-1$ választással $f^{(n-2M+1)} = f''$-nek az a-ban szigorú $(-,+)$ jelváltása van, azaz f'-nek az a-ban szigorú lokális minimuma van. Ez azt jelenti, hogy az f-nek az a-ban szigorú inflexiója van.
$f^{(n)}(a) < 0$ feltételezés analóg módon. $\square$

15. A π értelmezése. A periódikus függvény fogalma. A sin, cos függvények periodicitása

15.1. π értelmezése

DEFINÍCIÓ: A sin, cos függvények 2π-szerint periodikusak, ahol

$$\pi := 2 \cdot \inf\{\xi > 0 : \cos \xi = 0\} \in (0, 4).$$

15.2. Periodikus függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha

$$\exists\, p \in \mathbb{R},\ p > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f : x \pm p \in \mathcal{D}_f \text{ és } f(x+p) = f(x).$$

15.3. A sin, cos függvények periodicitása

TÉTEL: A sin, cos függvények 2π-szerint periodikusok.

BIZONYÍTÁS: $\forall x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\cos} = \mathcal{D}_{\sin} : x \pm 2\pi \in \mathcal{D}_{\cos} = \mathcal{D}_{\sin}$, illetve

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos(2\pi) - \sin x \sin(2\pi) = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x,$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \cos x \ sin(2\pi) = sinx \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x. \qquad \square$$

16. Az arkusz- és az area-függvények értelmezése, differenciálhatósága

16.1. Arkusz-függvények

16.1.1. Arkuszszinuszfüggvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\arcsin := \sin^{-1}_{|_{[-\pi/2,\pi/2]}} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2],$$

és $\arcsin(-1) = -\pi/2,\ \arcsin(0) = 0,\ \arcsin(1) = \pi/2$.

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\arcsin \in C$, és $\forall\, x \in (-1, 1) : \arcsin \in D\{x\}$, és

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

16.1.2. Arkuszkoszinuszfüggvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\arccos := \cos^{-1}_{|_{[0,\pi]}} : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

és $\arccos(-1) = \pi,\ \arccos(0) = \pi/2,\ \arccos(1) = 0$.

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\arccos \in C$, és $\forall\, x \in (0, \pi) : \arccos \in D\{x\}$, és

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

16.1.3. Arkusztangensfüggvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\mathrm{arctg} := \mathrm{tg}^{-1}_{(-\pi/2,\pi/2)} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2),$$

és $\mathrm{arctg}(0) = 0,\ \mathrm{arctg}(1) = \pi/4$.

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\mathrm{arctg} \in D$ és

$$\mathrm{arctg}\,'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

16.1.4. Arkuszkotangensfüggvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\operatorname{arcctg} := \operatorname{ctg}^{-1}_{(0,\pi)} : \mathbb{R} \to (0, \pi),$$

és $\operatorname{arcctg}(0) = \pi/2$, $\operatorname{arcctg}(1) = \pi/4$.

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\operatorname{arcctg} \in D$ és

$$\operatorname{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

16.2. Area-függvények

16.2.1. Areaszinuszhiperbolikusz-függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\operatorname{arsh} := \operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\operatorname{arsh} \in D$ és

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

16.2.2. Areakoszinuszhiperbolikusz-függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\operatorname{arch} := \operatorname{ch}^{-1}_{|[0,+\infty)} : [1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\operatorname{arch} \in D\{x\} \quad (x > 1)$, és

$$\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1).$$

16.2.3. Areatangenshiperbolikusz-függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\operatorname{arth} := \operatorname{th}^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\operatorname{arth} \in D$, és

$$\operatorname{arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (x \in (-1, 1)).$$

16.2.4. Areakotangenshiperbolikusz-függvény

ÉRTELMEZÉSE: Legyen

$$\operatorname{arcth} := \operatorname{cth}^{-1} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA: $\operatorname{arcth} \in D$, és

$$\operatorname{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| > 1).$$

17. Határozatlan integrál, primitív függvény, linearitás, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel, példák

17.1. Primitív függvény

DEFINÍCIÓ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye f-nek, ha $F \in D$, és $F' = f$.

17.2. Határozatlan integrál

DEFINÍCIÓ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F \in D$, $F' = f$. Ekkor legyen

$$\int f := \int f(x)dx := \{F\colon I \to \mathbb{R} : F \in D, F' = f\}$$

az f határozatlan integrálja.

17.3. Linearitás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $\int f \neq \emptyset$, $\int g \neq \emptyset$. Ekkor $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \int(f + \lambda g) \neq \emptyset$, és

$$\forall F \in \int f,\, G \in \int g : \int (f + \lambda g) = \{F + \lambda G + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

BIZONYÍTÁS: Ha $F \in \int f$, $G \in \int g$, akkor $F' = f$, $G' = g$. Ezért $F + \lambda G \in D$, és

$$(F + \lambda G)' = F' + \lambda G' = f + \lambda g.$$

Ezért $F + \lambda G \in \int(f + \lambda g)$, amiből (mivel $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$) következik a bizonyítandó egyenlőség. $\square$

17.4. Parciális integrálás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $f, g \in D$, $\int f'g \neq \emptyset$. Ekkor $\int fg' \neq \emptyset$, és

$$\forall\, F \in \int f'g : \int fg' = \{fg - F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen ugyanis $F \in \int f'g$, ekkor $F \in D$, és $F' = f'g$. Mivel $fg \in D$ és

$$(fg)' = f'g + fg',$$

ezért $fg - F \in D$, továbbá

$$(fg - F)' = f'g + fg' - F' = fg'.$$

Így $fg - F \in \int fg'$, tehát (mivel $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$)

$$\int fg' = \{fg - F + c : c \in \mathbb{R}\}. \qquad \square$$

17.5. Integrálás helyettesítéssel

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g\colon J \to I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g \in D$. Ekkor

1. ha $\int f \neq \emptyset$, akkor $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, és $\forall\, F \in \int f$:

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \{F \circ g + c : c \in \mathbb{R}\},$$

2. ha $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$, $\mathcal{R}_g = I$ és $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, akkor $\int f \neq \emptyset$, és $\forall\, H \in \int (f \circ g) \cdot g'$:

$$\int f = \{H \circ g^{-1} + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

BIZONYÍTÁS: Az 1. állítás bizonyításához legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D$, $F' = f$. Így $F \circ g \in D$, és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g',$$

azaz $F \circ g \in \int (f \circ g) \cdot g'$. Ezért (mivel $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$)

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \{F \circ g + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

2. állítás: g' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága és a $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$ feltétel miatt $g'(x) > 0$ $(x \in J)$, vagy $g'(x) < 0$ $(x \in J)$. Az első esetben a g függvény szigorúan monoton növő, a második esetben szigorúan monoton fogyó. Így létezik g^{-1} inverzfüggvény, és $g^{-1} \in C$. Így $g^{-1} \in D$, és

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}.$$

Ha $H \in \int (f \circ g) \cdot g'$, akkor $H \in D$, és $H' = (f \circ g) \cdot g'$. Így $H \circ g^{-1} \in D$, valamint

$$(H \circ g^{-1})' = (H' \circ g^{-1})(g^{-1})' = \Big(((f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1}\Big)(g^{-1})' =$$

$$f \cdot (g' \circ g^{-1})(g^{-1})' = f \cdot (g' \circ g^{-1}) \cdot \frac{1}{g' \circ g^{-1}} = f.$$

Tehát $H \circ g^{-1} \in \int f$, így (mivel $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$)

$$\int f = \{H \circ g^{-1} + c : c \in \mathbb{R}\}. \qquad \square$$

17.6. Példák

PÉLDA: $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c \quad (x \in \mathbb{R})$,

PÉLDA: $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c \quad (x > 0)$.

18. Alsó- felső, ill. oszcillációs összegek és tulajdonságaik, Riemann-integrál, Newton-Leibniz-formula

18.1. Alsó- felső összegek

18.1.1. Alsó-felső összegek fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ korlátos, zárt intervallum, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. A $\tau \subset [a, b]$ véges halmaz az $[a, b]$ intervallum felosztása, ha $a, b \in \tau$. Ekkor $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Legyen

$$m_i = m_i(f) := \inf\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \; (i = 0, \ldots, n-1),$$

$$M_i = M_i(f) := \sup\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \; (i = 0, \ldots, n-1).$$

Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó alsó összege,

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvények a τ felosztáshoz tartozó felső összege.

18.1.2. Alsó-felső összegek tulajdonsága

TÉTEL: Legyen adott a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor $\forall\, \tau, \mu \subset [a, b]$ felosztások esetén

1. $s(f, \tau) \le S(f, \mu)$,
2. ha τ finomabb μ-nél, akkor $s(f, \mu) \le s(f, \tau)$ és $S(f, \mu) \ge S(f, \tau)$.

18.2. Oszcillációs összeg

18.2.1. Oszcillációs összeg fogalma

DEINÍCIÓ: Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, $\tau \in \mathcal{F}_a^b$. Az

$$\omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

szám az f függvény τ által meghatározott oszcillációs összege.

18.2.2. Oszcillációs összeg tulajdonsága

TÉTEL: Tegyük fel„ hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos. Ekkor

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS: Ha $f \in R[a,b]$, akkor $I_*(f) = I^*(f)$. Figyelembe véve a Darboux-féle alsó-, felső integrál definícióját, mondhatjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \nu, \mu \in \mathcal{F}_a^b : s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2,\ S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \nu \cup \mu$, ekkor az alsó- felső összegekre vonatkozó tétel miatt:

$$s(f,\tau) \geq (s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2,\ S(f,\tau) < leqS(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Innen következik, hogy

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < I^*(f) - I_*(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

hiszen azt tettük fel, hogy $f \in R[a,b]$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$.
Most induljunk ki abból, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f,\tau) = I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon.$$

Mivel $I^*(f) - I_*(f) \geq 0$, ezért csak $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$ lehetséges. Ez azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. $\square$

18.3. Riemann-integrál

DEFINÍCIÓ: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a,b]$ korlátos, zárt intervallum, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-integrálható, ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx := I_*(f) = I^*(f)$$

szám az f függvény Riemann-integrálja.

18.4. Newton-Leibniz-formula

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $a, b]$ korlátos zárt intervallum, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$, $\exists\, F\colon [a,b] \to \mathbb{R} : F \in D$, $F' = f$. Ekkor

$$\forall\, F : \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

BIZONYÍTÁS: A Lagrange-féle középérték-tétel szerint $\forall\, a \le u < v \le b : \exists\, \xi \in (u, v)$:

$$F(v) - F(u) = F'(\xi)(v-u) = f(\xi)(v-u).$$

Ezért $\forall\, \tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (n \in \mathbb{N})$ felosztásra azt mondhatjuk, hogy

$$\exists\, \xi_j \in (x_j, x_{j+1})\ (j = 0, \ldots, n-1) : F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{n-1} (F(x_{j+1}) - F(x_j)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \sigma(f, \tau, y) \quad (y := (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \hat{\tau})$$

Következésképpen

$$s(f, \tau) \le F(b) - F(a) \le S(f, \tau).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le F(b) - F(a) \le$$

$$\le \inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} = I^*(f) = \int_a^b f.$$

Innen világos, hogy $\int_a^b f = I_*(f) = F(b) - F(a)$. $\square$

19. A riemann-integrál tulajdonságai: linearitás, monotonitás. Integrálható függvény abszolútértéke is integrálható

19.1. Linearitás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a, b]$. Ekkor

1. (additivitás) $f + g \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

2. (homogenitás) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha g \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b (\alpha g) = \alpha \int_a^b g.$$

Ezekből következik a linearitás: $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \in R[a, b]$, és

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g.$$

BIZONYÍTÁS:

1. Legyen $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}, \quad (i = 0, \ldots, n-1)$. Ekkor

$$m_i(f+g) = \inf\{f(x) + g(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \geq m_i(f) + m_i(g).$$

   Ezért

$$s(f+g,\tau) \geq s(f,\tau) + s(g,\tau).$$

   Legyen $\tau, \mu \in \mathcal{F}$. Így

$$s(f+g,\tau\cup\mu) \geq s(f,\tau\cup\mu) + s(g,\tau\cup\mu) \geq s(f,\tau) + s(g,\mu).$$

   De

$$I_*(f+g) \geq s(f+g),\tau\cup\mu) \geq s(f,\tau) + s(g,\mu),$$

   így (τ-ban illetve μ-ben sup-ot véve)

$$I_*(f+g) \geq I_*(f) + I_*(g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

   Ugyanígy

$$I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

   de

$$I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

   és

$$I_*(f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

   tehát

$$I_*(f+g) = I^*(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

   Tehát $f+g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (f+g) = I_*(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

2. analóg módon. $\square$

19.2. Riemann-integrál monotonitása

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor ha $g \in R[a,b]$ és $f(x) \le g(x) \quad (x \in [a,b])$, akkor $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\mu \in \mathcal{F}_a^b$, ekkor

$$s(f,\mu) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{f(x) : x \in I\} \cdot |I| \le$$

$$\le \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{g(x) : x \in I\} \cdot |I| = s(g,\mu) \le I_*(g) = \int_a^b g.$$

Következésképpen

$$\int_a^b f = I_*(f) = \sup\{s(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} \le \int_a^b g. \qquad \square$$

19.3. Integrálható függvény abszolútértéke is integrálható

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor $|f| \in R[a,b]$, és $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.

BIZONYÍTÁS: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f,\tau) < \varepsilon$. Mivel

$$\forall I \in \mathcal{F}(\tau) : \sup\{||f(x)| - |f(t)|| : x,t \in I\} \le \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\},$$

ezért

$$\omega(|f|,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{||f(x) - |f(t)|| : x,t \in I\} \cdot |I| \le$$

$$\le \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\} \cdot |I| = \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Tehát $|f| \in R[a,b]$. Továbbá $-f \in R[a,b]$, hiszen

$$\omega(-f,\tau) = \omega(f,\tau) < \varepsilon,$$

így $(-f)$-re is alkalmazható a Riemann-integrálhatóság ekvivalenciájáról szóló tétel. Gondoljuk meg, hogy

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f.$$

Valóban, $\forall \mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra

$$s(-f,\mu) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{-f(x) : x \in I\} \cdot |I| = -\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{f(x) : x \in I\} \cdot |I| = -S(f,\tau),$$

következésképpen

$$\int_a^b (-f) = \sup\{s(-f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} = \sup\{-S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} =$$

$$= -\inf\{S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_a^b\} = -\int_a^b f.$$

Ugyanakkor

$$-f, f \leq |f|,$$

amiből az előbbiek és a Riemann-integrál monotonitásáról szóló tétel alapján

$$\pm \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

azaz

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \qquad \square$$

20. Folytonos függvény integrálható, monoton függvény integrálható

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $[a, b]$ korlátos és zárt intervalumon értelmezett $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R[a, b]$. Ugyanez igaz, ha f-ről folytonosság helyett monotonitást tételezünk fel.

BIZONYÍTÁS: Ha az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \in C$, akkor egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (x, t \in [a, b], \ |x - t| < \delta).$$

Ha tehát $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ feloszásra $\delta_\tau < \delta$ teljesül, akkor $\forall I \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra $|I| < \delta$, így

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Következésképpen

$$\omega(f, \tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \cdot |I| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} |I| = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Ezért $f \in R[a, b]$. (Az oszcillációs összeg tulajdonságáról szóló tétel miatt)
Ha pl. az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton növő (monoton fogyó esetén bizonyítás analóg), akkor valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mellett az

$$x_k := a + k\frac{b-a}{n} \quad (k = 0, \ldots, n)$$

osztópontokkal definiált $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ egyenletes felosztásra

$$\omega(f, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup\{|f(x) - f(t)| : x_k \leq x, \, t \leq x_{k+1}\} \cdot (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor legyen a fenti $1 \leq n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon,$$

amikor is $\omega(f, \tau) < \varepsilon$. Így $f \in R[a, b]$. (Az oszcillációs összeg tulajdonságáról szóló tétel miatt) $\square$

21. Riemann-integrálható függvények szorzata és hányadosa

21.1. Riemann-integrálható függvények szorzata

TÉTEL: Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $fg \in R[a, b]$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $I \subset [a, b]$ korlátos és zárt intervallum. Ekkor $\forall\, x, t \in I$:

$$|(fg)(x) - (fg)(t)| = |f(x)g(x) - f(t)g(t)| = |f(x)(g(x) - g(t)) - (f(t) - f(x))g(t)| \leq$$

$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(t)| + |f(t) - f(x)| \cdot |g(t)| \leq C \cdot (|g(x) - g(t)| + |f(t) - f(x)|)$$

(ahol $C > 0$ közös korlátja az f, g függvényeknek, azaz $|f(z)|, |g(z)| \leq C \quad (z \in [a, b])$). Ezért

$$o_I(fg) := \sup\{|(fg)(x) - (fg)(t)| : x, t \in I\} \leq$$

$$\leq C \cdot (\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} + \sup\{|g(x) - g(t)| : x, t \in I\}) =: C \cdot (o_I(f) + o_I(g)).$$

Ennek alapján $\forall\, \tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra

$$\omega(fg, \tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}_a^b} o_I(fg) \cdot |I| \leq$$

$$C \cdot \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_a^b} o_I(f) \cdot |I| + \sum_{I \in \mathcal{F}_a^b} o_I(g) \cdot |I| \right) = C \cdot (\omega(f, \tau) + \omega(g, \tau)).$$

A feltételeink szerint $f, g \in R[a, b]$, ezért a Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel alapján $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \mu, \nu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztások, amelyekkel

$$\omega(f, \mu) < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad \omega(g, \nu) < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Legyen $\tau := \mu \cup \nu$, ekkor a felosztásokra vonatkozó tétel miatt a fentiek szerint

$$\omega(fg, \tau) \leq C \cdot (\omega(f, \tau) + \omega(g, \tau)) \leq C \cdot (\omega(f, \mu) + \omega(g, \nu)) \leq C \cdot \frac{2\varepsilon}{2C} = \varepsilon.$$

Ez a Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel alapján (szükséges és) elégséges ahhoz, hogy $fg \in R[a, b]$. $\square$

21.2. Riemann-integrálható függvények hányadosa

TÉTEL: Ha $f, g \in R[a, b]$, és $\exists\, r > 0 : |g(x)| \geq r \quad (x \in [a, b])$, akkor $f/g \in R[a, b]$.

BIZONYÍTÁS: Lássuk be, hogy $1/g \in R[a, b]$, amiből a Riemann-integrálható függvények szorzatáról szóló tétel és az

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

egyenlőség alapján $f/g \in R[a, b]$ már következni fog. Legyen $I \subset [a, b]$ korlátos és zárt intervallum. Ekkor

$$\forall\, x, t \in I : \left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(t) \right| =$$

$$= \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(t)}\right| = \frac{|g(t)-g(x)|}{|g(x)g(t)|} \le \frac{1}{r^2} \cdot |g(t)-g(x)|,$$

így

$$o_I(1/g) := \sup\{|(1/g)(x) - (1/g)(t)| : x,t \in I\} \le$$
$$\le \frac{1}{r^2} \cdot \sup\{|g(x) - g(t) : x,t \in I\} =: \frac{1}{r^2} \cdot o_I(g).$$

Így

$$\forall\, \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(1/g,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}_a^b} o_I(1/g)\cdot|I| \le \frac{1}{r^2}\cdot \sum_{I\in\mathcal{F}_a^b} o_I(g)\cdot|I| = \frac{\omega(g,\tau)}{r^2}.$$

A feltétel szerint $g \in R[a,b]$ ezért a Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel miatt $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amelllyel $\omega(g,\tau) < r^2 \cdot \varepsilon$. Tehát az előbbieket figyelembe véve

$$\omega(1/g),\tau) < \frac{r^2\cdot\varepsilon}{r^2} = \varepsilon,$$

ami a Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel alapján azt jelenti, hogy $1/g \in R[a,b]$. $\square$

22. Egy Riemann-integrálható függvény véges sok helyen való megváltoztatása. A Riemann-integrál intervallum szerinti additivitása.

22.1. Riemann-integrálható függvény véges sok helyen való megváltoztatása

TÉTEL: Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények. Tegyük fel, hogy az $A := \{x \in [a,b] : f(x) \ne g(x)\}$ halmaz véges. Ekkor

1. $f \in R[a,b] \Leftrightarrow g \in R[a,b]$,
2. ha $f \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$.

BIZONYÍTÁS: Lássuk be az állításainkat először abban az esetben, amikor az A halmaz 1 elemű: valamilyen $c \in [a,b]$ elemmel $A = \{c\}$. Induljunk ki abból, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Feltehető, hogy $c \in \tau$, különben τ-t cseréljük fel $\tau \cup \{c\}$-vel, amikor is
$\omega(f,\tau\cup\{c\}) \le \omega(f,\tau) < \varepsilon$. Legyen

$$\tau = \{x_0,\ldots,x_n\}$$

$(n \in \mathbb{N})$. Ekkor $\exists!\, j = 0,\ldots,n :\ c = x_j$. Így

$$o_k(g) := \sup\{|g(x) - g(t)| : x,t \in [x_k,x_{k+1}]\},$$

$$o_k(f) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in [x_k,x_{k+1}]\} \quad (k = 0,\ldots,n-1)$$

jelölésekkel a következőket mondhatjuk:

$$\omega(g,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} o_k(g)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{j-1.j\neq k=0}^{n-1} o_k(g)(x_{k+1} - x_k) + o_{j-1}(g)(x_j - x_{j-1}) + o_j(g)(x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \sum_{j-1,j\neq k=0}^{n-1} o_k(f)(x_{k+1} - x_k) + o_{j-1}(g)(x_j - x_{j-1}) + o_j(g)(x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \omega(f,\tau) + (o_{j-1}(g) - o_{j-1}(f))(x_j - x_{j-1}) + (o_j(g) - o_j(f)(x_{j+1} - x_j)$$

(ahol $o_{-1}(g) := o_{-1}(f) := 0$). A feltételeink szerint az f, g függvények korlátosak, ezért

$$\exists C > 0 : |f(x)|, \, |g(x)| < C \quad (x \in [a,b]).$$

Világos, hogy $o_k(g)$, $o_k(f) \leq 2C \quad (k = 0, \ldots, n-1)$, így

$$\omega(g,\tau) \leq \omega(f,\tau) + 4C(x_{j+1} - x_{j-1}) < \varepsilon + 8C\delta_\tau.$$

A τ felosztásrol feltehetjük, hogy $8C\delta_\tau < \varepsilon$, azaz $\delta_\tau < \varepsilon/(8C)$, ugyanis különbeen tovább finomítva a τ-t, ezt elérhetjük, miközben az $\omega(f,\tau)$ oszcillációs összeg legfeljebb csökken. Így végül oda jutunk, hogy $\omega(g,\tau) < 2\varepsilon$, ami a g függvény Riemann-integrálhatóságát jelenti. Mivel az f és a g felcserélésével az ekvivalencia fordított irányát kapjuk, ezért az 1. állítás (1 elemű A esetén) beláttuk.
Legyen továbbra is a fenti A halmaz 1 elemű, és lássuk be a 2. állítást. Ha a szóban forgó c-re $a < c < b$, akkor tetszőleges

$$a < d < c < e < b$$

helyeket véve

$$\int_a^b g = \int_a^d g + \int_d^e g + \int_e^b g = \int_a^d f + \int_d^e f + \int_e^b f = \int_a^b f + \int_d^e g - \int_d^e f.$$

Ezért

$$\left|\int_a^b g - \int_a^b f\right| \leq \left|\int_d^e g\right| + \left|\int_d^e f\right| \leq 2C \cdot (e - d).$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor válasszuk a d, e számokat úgy, hogy $2C \cdot (e - d) < \varepsilon$, amikor is

$$\left|\int_a^b g - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$

következik. Más szóval $|\int_a^b g - \int_a^b f| = 0$, azaz $\int_a^b g = \int_a^b f$.
A $c = a$, vagy $c = b$ esetben az előbbiek értelemszerű módosításával kapjuk ugyanezt.
Ezzel elintéztük az 1 elemű A halmazokat. Általában legyen az A elemeinek száma $1 \leq n \in \mathbb{N}$, és alkalmazzuk a teljes indukciót. Az $n = 1$ esetben az előbb láttuk be a tételt. Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén már igaz az állításunk minden olyan A halmazra, amelyik legfeljebb n elemű. Ha most a tételbeli A elemszáma $n + 1$, akkor legyen valamilyen $c \in A$ segítségével

$$\tilde{A} := A \setminus \{c\}.$$

Ekkor $\tilde{A}$ elemszáma n, így a

$$h(x) := \begin{cases} f(x) \ (x \notin \tilde{A}) \\ g(x) \ (x \in \tilde{A}) \end{cases}$$

függvényre $h \in R[a,b]$ és $\int_a^b h = \int_a^b f$. Világos hogy

$$\{x \in [a,b] : g(x) \neq h(x)\} = \{c\},$$

ami 1 elemű halmaz. Ezért az indukció feltétel alapján $g \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b g = \int_a^b h = \int_a^b f. \qquad \square$$

22.2. Riemann-integrál intervallum szerinti additivitása

TÉTEL: Bármely korlátos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén

1. $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f_c \in R[a,c]$ és $f^c \in R[c,b]$,
2. $f \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f_c + \int_c^b f^c$.

BIZONYÍTÁS:

1. "$\Leftarrow$" Tegyük fel, hogy $f_c \in R[a,c]$ és $f^c \in R[c,b]$. Ekkor Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel alapján $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu \in \mathcal{F}_a^c, \nu \in \mathcal{F}_c^b$ felosztások, hogy

$$\omega(f_c,\mu) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega(f^c,\nu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Világos, hogy $\tau := \mu \cup \nu \in \mathcal{F}_a^b$, továbbá

$$\omega(f,\tau) = \omega(f_c,\mu) + \omega(f^c,\nu) < \varepsilon.$$

A Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tételt figyelembe véve ez azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$.

"$\Rightarrow$" Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, ismét a Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tétel alapján $\forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás: $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Feltehetjük, hogy $c \in \tau$, különben a τ-t kicserélve $\tau \cup \{c\}$-re azt kapjuk, hogy

$$\omega(f,\tau \cup \{c\}) \leq \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Legyen

$$\mu := \tau \cap [a,c], \ \nu := \tau \cap [c,b].$$

Ekkor

$$\omega(f_c,\mu) + \omega(f^c,\nu) = \omega(f,\tau) < \varepsilon$$

miatt

$$\omega(f_c,\mu), \ \omega(f^c,\nu) \leq \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

A Riemann-integrálhatóság és a felosztás ekvivalenciájáról szóló tételből ezért az következik, hogy $f_c \in R[a,c]$, $f^c \in R[c,b]$.

2. Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$. Ekkor az 1. állítás miatt $f_c \in R[a,c]$, $f^c \in R[c,b]$. Így $\forall \varepsilon > 0$ esetén egy-egy $\mu \in \mathcal{F}_a^c$, $\nu \in \mathcal{F}_c^b$ felosztással

$$s(f_c, \mu) > \int_a^b f_c - \varepsilon,\ s(f^c, \nu) > \int_a^b f^c - \varepsilon.$$

Ha tehát $\tau := \mu \cup \nu$, akkor

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c - 2\varepsilon < s(f_c, \mu) + s(f^c, \nu) = s(f, \tau) \leq \int_a^b f.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c \leq \int_a^b f.$$

Ugyanakkor alkalmas $\gamma \in \mathcal{F}_a^c$, $\eta \in \mathcal{F}_c^b$ felosztásokkal

$$S(f_c, \gamma) < \int_a^c f_c + \varepsilon,\ S(f^c, \eta) < \int_c^b f^c + \varepsilon$$

is igaz. Következésképpen a $\theta := \gamma \cup \eta \in \mathcal{F}_a^b$ felosztással

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c + 2\varepsilon > S(f_c, \gamma) + S(f^c, \eta) = S(f, \theta) \geq \int_a^b f.$$

Más szóval

$$\int_a^c f_c + \int_c^b f^c \geq \int_a^b f,$$

ami az előbiekkel együtt a $\int_a^c f_c + \int_c^b f^c = \int_a^b f$ egyenlőséget adja. □

23. Az integrálfüggvény fogalma, folytonossága, differencálhatósága. Integrálás helyettesítéssel és parciálisan

23.1. Integrálfüggvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in R[a,b]$, ekkor $\forall x \in (a,b)$, $\exists \int_a^x f$ határozott integrál. Az $\int_a^a f := 0$ megállapodással tekintsük az

$$F(x) := \int_a^x f \quad (x \in [a,b])$$

függvényt az f integrálfüggvényének.

23.2. Integrálfüggvény folytonossága

TÉTEL: Legyen $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ az $f \in R[a,b]$ függvény integrálfüggvénye. Ekkor az F függvény folytonos.

BIZONYÍTÁS: $\forall\, u, v \in [a, b]$, $u < v$ esetén a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásról szóló tétel és a Riemann-integrál monotonitási tulajdonságról szóló tétel szerint

$$|F(v) - F(u)| = \left| \int_a^v f - \int_a^u f \right| = \left| \int_u^v f \right| \le \int_u^v |f| \le M|v - u|,$$

ahol M az f függvény valamelyik korlátja: $|f(x)| \le M \quad (x \in [a, b])$. Ha tehát $\varepsilon > 0$, és a $\delta > 0$ számot úgy választjuk, hogy $M\delta < \varepsilon$, akkor

$$\forall\, u, v \in [a, b],\ |u - v| < \delta : |F(v) - F(u)| < \varepsilon.$$

Vagyis az F függvény egyenletesen folytonos, így folytonos is. $\square$

23.3. Integrálfüggvény differenciálhatósága

TÉTEL: Legyen $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ az $f \in R[a, b]$ függvény integrálfüggvénye. Ha $c \in (a, b)$ és $f \in C\{c\}$, akkor $F \in D\{c\}$, és $F'(c) = f(c)$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy $a < c < b$ és $f \in C\{c\}$. Ez azt jeleneti, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : a < c - \delta < c + \delta < b,\ \text{és}\ |f(t) - f(c)| < \varepsilon \quad (c - \delta < t < c + \delta).$$

Írjuk fel az F függvény c-hez tartozó $\Delta_c F$ különbségihányados-függvényének és az $f(c)$-nek az eltérését:

$$\Delta_c F(x) - f(c) = \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \frac{1}{c - x} \cdot \left(\int_a^c f - \int_a^x f \right) - f(c) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c - x} \cdot \displaystyle\int_x^c f - f(c) = \dfrac{1}{c - x} \cdot \displaystyle\int_x^c (f(t) - f(c))dt & (c - \delta < x < c) \\ \dfrac{1}{x - c} \cdot \displaystyle\int_c^x f - f(c) = \dfrac{1}{x - c} \cdot \displaystyle\int_c^x (f(t) - f(c))dt & (c < x < c + \delta) \end{cases}$$

Innen a Riemann-integrál monotonitási tulajdonságról szóló tétel alapján

$$|\Delta_c F(x) - f(c)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{|c - x|} \cdot \displaystyle\int_x^c |f(t) - f(c)|dt \le \varepsilon & (c - \delta < x < c) \\ \dfrac{1}{|x - c|} \cdot \displaystyle\int_c^x |f(t) - f(c)|dt \le \varepsilon & (c < x < c + \delta) \end{cases}$$

Vagyis azt láttuk be, hogy

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : |\Delta_c F(x) - f(c)| \le \varepsilon \quad (x \in [a, b],\ |x - c| < \delta).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\exists \lim\limits_{x \to c} \Delta_c F(x) = f(c)$ határérték (ami véges), azaz $F \in D\{c\}$ és $F'(c) = f(c)$. $\square$

23.4. Integrálás helyettesítéssel

TÉTEL: Tegyük fel, hogy valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum esetén $f \in R[a,b]$ függvénynek az $[a,b]$ intervallumon van primitív függvénye. Legyen továbbá az $[\alpha,\beta]$ korlátos és zárt intervallum, $g\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $g \in C$, $g \in D\{x\} \quad (x \in (\alpha,\beta))$, $(f \circ g) \cdot g' \in R[\alpha,\beta]$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, $\forall\, \alpha < x < \beta : a < g(x) < b$. Ekkor

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g) \cdot g' = \int_a^b f.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen az $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye az f-nek az $[a,b]$ intervallumon. Következésképpen $F \in C$, $F \in D\{x\}$, $F'(x) = f(x) \quad (a < x < b)$, továbbá a Newton-Leibniz-tétel szerint

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Összetett függvények folytonosságáról és differenciálhatóságáról szóló tételekből következően az $F \circ g \in C$, $F \circ g \in D\{x\}$ és

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\alpha < x < \beta).$$

Ez azt jelenti, hogy $F \circ g$ függvény primitív függvénye az $(f \circ g) \cdot g'$-nek az $[\alpha,\beta]$ intervallumon. Így ismét a Newton-Leibniz tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g) \cdot g' = F \circ g(\beta) - F \circ g(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_a^b f. \quad \square$$

23.5. Parciális integrálás

TÉTEL: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C$, $f, g \in D\{x\}$ $(x \in (a,b))$, $f'g, g'f \in R[a,b]$. Ekkor

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f.$$

BIZONYÍTÁS: A folytonosság és műveletek kapcsolatáról szóló tétel, a deriválási szabályokról szóló tétel valamint a feltételek miatt $fg \in C$, $fg \in D\{x\}$ és

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (a < x < b).$$

Legyen (tetszőleges $u, v, z, w \in \mathbb{R}$ esetén)

$$F(x) := \begin{cases} f'(x) & (a < x < b) \\ u & (x = a) \\ v & (x = b) \end{cases}, \quad G(x) := \begin{cases} g'(x) & (a < x < b) \\ z & (x = a) \\ w & (x = b), \end{cases}$$

Ekkor

$$F(x)g(x) + G(x)f(x) = (fg)'(x) \quad (a < x < b).$$

A feltételek szerint $Fg, Gf \in R[a,b]$ amiből a Riemann-integrálható függvények lineáris kombinácjójának az integrálhatóságáról szóló tétel alapján $Fg + Gf \in R[a,b]$, tehát $(fg)' \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (Fg + Gf) = \int_a^b Fg + \int_a^b Gf = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f$$

következik. VIlágos, hogy az fg szorzatfüggvény primitív függvénye az $(fg)'$ derivált-függvények az $[a,b]$ intervallumon. Ezért a Newton-Leibniz tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f = (fg)(b) - (fg)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

ami ekvivalens a bizonyítandó egyenlőséggel. $\square$

24. Taylor-formula integrál maradékkal

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, f $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható.. Ekkor $\forall\, a, x \in I, a \neq x$:

$$(*) \qquad f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n dt.$$

BIZONYÍTÁS: Teljes indukció: Legyen először $n = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $\exists f'$, $f' \in C$, a $(*)$ egyenlőség pedig a következő:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Mivel itt (a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság kapcsolatáról szóló tétel miatt) $f' \in R[a,b]$ az f függvény pedig primitív függvénye az f'-nek, ezért a Newton-Leibniz-formula miatt az előbbi egyenlőség fennáll.
Tegyük most fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re a tételünk állítása már igaz.
Ha az $f\colon I \to \mathbb{R} \in D^{n+2}$, akkor egyrészt a

$$G(t) := -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \quad (t \in I)$$

jelöléssel $G \in D$ és

$$G'(t) = (x-t)^n \quad (t \in I),$$

másrészt a parciális integrálás szabálya szerint

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f(n+1)(t) \cdot (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x)G(x) - f^{(n+1)}(a)G(a)}{n!} - \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot G(t)dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot (x-t)^{n+1} dt.$$

Innen

$$f(x) - T_{a,n}f(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = f(x) - T_{a,n+1}f(x) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_a^x f^{(n+2)}(t) \cdot (x-t)^{n+1} dt$$

következik, ami a bizonyítandó állítás n helyett $(n+1)$-re. $\square$

25. Terület, függvény (grafikon) ívhossza, forgástest térfogata, felszíne. Improprius integrál

25.1. Ívhossz

25.1.1. Ívhossz fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, és $\forall\, \tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}_a^b \quad (1 \le n \in \mathbb{N})$, és

$$\ell_i := \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

a szakasz ívhossza. Legyen

$$\ell_f(\tau) := \sum_{i=0}^{n-1} l_i$$

az f függvény(grafikon) ívhossza.

25.1.2. Függvény(grafikon) ívhosszának létezése

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in C^1[a, b]$. Ekkor az f függvény(grafikon)-nak van ívhossza, és

$$\ell_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

25.2. Terület

DEFINÍCIÓ: Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, $0 \le f \in R[a, b]$. Ekkor

$$\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \le y \le f(x)\}$$

a függvény(grafikon) alatti síkidom.
Az

$$|\mathcal{S}| := \int_a^b f$$

az $\mathcal{S}$ síkidom területe.

25.3. Forgástest

DEFINÍCIÓ: Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, $0 \le f \in R[a, b]$ Az f függvény(grafikunt megforgatva az X-tengely körül kapjuk a

$$\mathcal{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\ (y, z \in \mathbb{R})\}$$

forgástestet.
A

$$|\mathcal{T}| := \pi \cdot \int_a^b f^2$$

a $\mathcal{T}$ forgástest térfogata.
Az

$$\mathcal{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 = f^2(x) \quad (y, z \in \mathbb{R})\}$$

A $\mathcal{T}$ forgástest felülete. Az

$$|\mathcal{A}| := 2\pi \cdot \int_a^b f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}$$

Az $\mathcal{A}$ forgásfelület felszíne.

25.4. Improprius integrál

DEFINÍCIÓ: Tegyük fel, hogy $-\infty \leq a < b < +\infty$, és az $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ függvényről a következőt tudjuk: $\forall\, a < c < b$, $\exists \int_c^b f$ határozott integrál. Legyen

$$G(x) := \int_x^b f \quad (a < x < b).$$

Azt mondjuk hogy az f függvény ipropriusan integrálható, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} G(x)$ véges határérték. Ekkor az

$$\int_a^b f := \lim_{x \to a} G(x)$$

szám az f improprius integrálja.

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzetem,
- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2013 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzetem,
- Horváth Zsófi ELTE IK programtervezői informatikus szak 2013 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzete,
- Simon Péter: Bevezetés az analízisbe I. - egyetemi jegyzet.