ANALÍZIS III. ELMÉLETI KÉRDÉSEK

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2014. május 15.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

Ez a Mű a Creative Commons Nevezd meg! - Ne add el! - Így add tovább! 3.0 Unported Licenc feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

1. Definiálja a metrikus teret!

Legyen $M \neq \emptyset$. Az (M, ϱ) párt metrikus térnek nevezzük, ha $\varrho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ és

1. $\varrho(x,y) \geq 0 \quad (\forall\, x, y \in M)$,
2. $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \quad (\forall\, x, y \in M)$,
4. $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \quad (\forall\, x, y, z \in M)$.

Ahol ϱ a metrika, $\varrho(x,y)$ az x és y távolsága.

2. Hogyan értelmeztük az $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ metrikus teret?

$(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ metrikus tér, ahol $\varrho_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.

3. Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

$a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots n$.

Ekkor

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Egyenlőség $\Leftrightarrow b_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots n$ vagy $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : a_i = \lambda b_i \quad \forall i = 1, \dots n$.

4. Irja le a normált tér definícióját!

$(X, \|\cdot\|)$ normált tér, ha

1. X lineáris vektortér $\mathbb{R}$ felett,
2. $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ és
   - i, $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in X)$,
   - ii, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   - iii, $|\lambda x| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R})$,
   - iv, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in X)$.

5. Definiálja $\mathbb{R}^n$-en a $\|\cdot\|_2 \quad (1 \leq p \leq +\infty)$ normát!

6. Hogyan értelmezzük az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált térben egy pont környezetét?

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < r\}$ az a r-sugarú környezete vagy az a középű r-sugarú nyílt gömb.

7. Mit jelent az, hogy egy $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$-beli sorozat konvergens?

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ vektorsorozat konvergens, ha

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geq k_0 : \|a_k - \alpha\|_2 < \varepsilon.$$

Jelölés: $\alpha = \lim a_k$.

8. Milyen ekvivalens állításokat ismer normált térbeli sorozat konvergenciájára?

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor a következő tulajdonságok ekvivalensek:

1. (a_k) konvergens,
2. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \geq k_0 : a_k \in K_\varepsilon(\alpha)$,
3. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n\ \lim \|a_k - \alpha\|_2 = 0$.

9. Fogalmazza meg normált térbeli konvergens sorozatok alaptulajdonságait!

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ norrmált tér, $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor

1. Ha (a_k) konvergens és $\lim a_k = \alpha$, akkor
   - i, $\exists!\, \alpha$,
   - ii, (a_k) korlátos,
   - iii, $\forall\, \nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatra $\lim a_{\nu(k)} = \alpha$
2. $\nu_1, \nu_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat. Ha $\lim a_{\nu_1(k)} \neq \lim a_{\nu_2(k)}$, akkor (a_k) divergens.

10. Milyen műveleti tételeket ismer normált térbeli konvergens sorozatokra?

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $(a_k), (b_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozatok konvergensek, $\alpha = \lim a_k$, $\beta = \lim b_k$. Ekkor

1. $(a_k + b_k)$ is konvergens, és $\lim(a_k + b_k) = \alpha + \beta$,
2. (λa_k) is konvergens, és $\lim(\lambda a_k) = \lambda\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

11. Hogyan jellemezhető $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciája a koordinátasorozatokkal?

$$(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n,\ a_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha, \quad \alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad (\forall\, i = 1, \ldots n).$$

12. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat Cauchy-sorozat?

$(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Cauchy sorozat, ha $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k_0, \forall\, k, l \geq k_0 : \|a_k - a_l\| < \varepsilon$.

13. Milyen kapcsolat van normált térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok között?

$(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy sorozat.

14. Definiálja a torlódási pont fogalmát!

$A \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ az A torlódási pontja, ha $\forall\, K(a) : K(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$.
Jelölés: A' a torlódási pontok halmaza.

15. Milyen ekvivalens állításokat ismer a torlódási pontról?

$a \in A' \Leftrightarrow \forall\, K(a) : K(a) \cap A$ végtelen halmaz
$a \in A' \Leftrightarrow \exists\, (a_k)\colon \mathbb{N} \to A$ injektív sorozat: $\lim a_k = a$.

16. Definiálja a belső pont fogalmát!

$a \in \mathbb{R}^n$ belső pontja $A \subset \mathbb{R}^n$-nek, ha $\exists\, K(a) \subset A$.

17. Mi a nyílt halmaz definíciója?

$A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont.

18. Milyen állításokat ismer zárt halmaz jellemzésére?

$A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow A' \subset A$,
$A \subset \mathbb{R}^n$ zárt $\Leftrightarrow \forall\, (a_k)\colon \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozatra $\lim a_k = \alpha \in A$.

19. Fogalmazza meg a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt!

Ha az $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ korlátos sorozat, akkor kiválasztható egy $(a_k) \circ \nu = (a_{\nu_k})$ konvergens részsorozat.

20. Definiálja a normált terek közötti leképezések határértékét!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1), a \in \mathcal{D}_f'$. f-nek $\exists$ határértéke a-ban, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^m, \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\varepsilon(A) \Leftrightarrow$$
$$\exists\, A \in \mathbb{R}^m, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathcal{D}_f, 0 < \|x - a\| < \delta : \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

21. Definiálja a normált terek közötti leképezések pontbeli folytonosságát!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\varepsilon(f(a)) \Leftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \|x - a\| < \delta : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim_a f = A,\ f \in C(a)$.

22. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \forall\, (x_k)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \lim x_k = a : \lim f(x_k) = f(a).$$

23. Mit tud a korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény és $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkor $\mathcal{R}_f$ is korlátos és zárt.

24. Mondja ki a Weierstrass tételt!

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkor $\exists \max f$ és $\exists \min f$.

25. Mit tud a korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény inverzéről?

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, f injektív, akkor f^{-1} folytonos.

26. Definiálja az egyenletes folytonosságot!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény egyenletesen folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}_f, \|x - y\| < \delta : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

27. Mondja ki a Heine-tételt!

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkkor f egyenletesen folytonos.

28. Mi a kontrakció definíciója?

$X \subset \mathbb{R}^n, f \colon X \to X$ kontrakció, ha

$$\exists \, 0 \le q < 1 : \|f(x) - f(y)\| \le q \cdot \|x - y\| \quad (\forall \, x, y \in X).$$

29. Fogalmazza meg a Banach-féle fixpont-tételt!

$X \subset \mathbb{R}^n, f \colon X \to X$ kontrakció, X zárt. Ekkor

i, f-nek $\exists!$ fixpontja, azaz $\exists! \, x^* \in X : f(x^*) = x^*$,

ii, Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, $x_{n+1} := f(x_n)$, akkor $(x_n) \colon \mathbb{N} \to X$ konvergens és $\lim x_n = x^*$,

iii, $\|x_n - x^*\| \le \dfrac{q^n}{1-q} \cdot \|x_1 - x_0\| \quad (n \in \mathbb{N})$.

30. Mit jelent az, hogy egy $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris?

$L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, ha

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad (\forall \, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Jelölés: $\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

31. Milyen normát értelmeztünk lineáris leképezésekre?

$L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operátornormája $\|L\| := \sup\{|L(h)| : \|h\| \le 1\}$.

32. Milyen egyenlőtlenséget ismer lineáris leképezések normájára?

$|L(h)| \leq \|L\| \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n)$.

33. Írja le az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontbeli (totális) deriválhatóságának a definícióját!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\exists\, L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $L = f'(a)$.

34. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists\, L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$

35. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra mátrixokkal?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

$$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(h) \cdot \|h\|.$$

Ekkor $f'(a) = A$.

36. Milyen kapcsolat van a pontbeli deriválhatóság és folytonosság között?

$f \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

i, $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$,

ii, $f \in D(a) \not\Leftarrow f \in C(a)$.

37. A deriválhatóság és a koordináta függvények deriválhatósága közötti kapcsolat.

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ koordináta függvény. Ekkor

$$f \in D(a) \Leftrightarrow f_i \in D(a) \quad (i = 1, \ldots, m) \text{ és } f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}.$$

38. Adja meg a kompozíció függvény deriváltját!

$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g,\ g \in D(a), f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, f \in D(g(a)),\ \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \circ g \in D(a) \text{ és } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

39. Adja meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény parciális deriváltjainak a fogalmát!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.
Legyen $F(t) := f(a + t \cdot e_i),\ t \in K(a) \subset \mathbb{R}, \quad (e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$. Ekkor f-nek $\exists$ parciális deriváltja az i-edik változó szerint az a pontban, ha $F \in D(a) \quad (F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. A parciális derivált $= F'(a)$.

Jelölés: $\delta_i f(a) = F'(a)$.

40. Milyen tételt ismer a deriváltmátrix előállítására?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, f \in D(a), f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordináta függvények.

Ekkor

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \delta_1 f_1(a),\ \delta_2 f_1(a), \ldots, \delta_n f_1(a) \\ \delta_1 f_2(a),\ \delta_2 f_2(a), \ldots, \delta_n f_2(a) \\ \vdots \\ \delta_1 f_m(a),\ \delta_2 f_m(a), \ldots, \delta_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

41. Milyen elégséges feltételt ismer a totális deriválhatóságra a parciális deriváltakkal?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy

i, $\exists\, \delta_i f(x) \quad \forall\, x \in K(a) \quad (i = 1, \ldots, n)$,

ii, $\delta_i f \in C(a) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$,

akkor $f \in D(a)$.

42. Definiálja az iránymenti deriváltat!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, azaz $\|e\| = 1$. Legyen $F(t) := f(a + t \cdot e)$, ahol $t \in K(a) \subset \mathbb{R}$.
Az f e iránymenti deriváltja létezik az a pontban, ha $F \in D(0) \quad (F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. $F'(0)$ az iránymenti derivált.

Jelölés: $\delta_e f(a)$.

43. Milyen képletet ismer az iránymenti derivált kiszámolására?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor $f \in D(a) \Rightarrow \exists\, \delta_e f(a) \quad \forall\, e$ egységvektor esetén, és $\delta_e f(a) = f'(a) \cdot e$,

44. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor f kétszer deriválható ($f \in D^2(a)$), ha

i, $\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : f \in D(K(a))$,

ii, $\delta_i f \in D(a) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

45. Mit jelent az, hogy egy függvény $s+1$-szer deriválható egy pontban?

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor f $(s+1)$-szer deriválható a-ban ha

i, $\exists\, K(a)$, hogy $f \in D^{(s)}(K(a))$,

ii, Minden s-edrendű parciális derivált $\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_s} f \in D(a)$.

Jelölés: $f \in D^{(s+1)}(a)$.

46. Fogalmazza meg a Young-tételt!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^2(a)$. Ekkor

$$\delta_i\delta_j f(a) = \delta_j\delta_i f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

47. Adja meg a Taylor-polinom definícióját!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^m(a)$. Az f m-edik Taylor-polinomja:

$$T_m f(x) = T_m f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{\delta^i f(a)}{i!} h^i.$$

48. Milyen képletet ismer az elsősfokú n változós Taylor-polinomra?

$T_{1,a} f(h) = f(a) + \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j f(a) \cdot h_j$.

49. Milyen képletet ismer a másodfokú n változós Taylor-polinomra?

$T_{2,a} f(h) = f(a) + \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j f(a) \cdot h_j + \left(\sum\limits_{\substack{k=1 \\ l=1 \\ k \neq l}}^{n} \delta_{kl} f(a) \cdot h_k h_l + \sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\delta_{ss} f(a)}{2} \cdot h_s^2 \right)$.

50. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in D^{m+1}(K(a))$. Ekkor $\forall\, h \in \mathbb{R}^n, a+h \in K(a)$, $\exists\, \nu \in (0,1)$:

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{\delta^i f(a)}{i!} \cdot h^i}_{T_m f(a+h)} + \sum_{|i|=m+1} \frac{\delta^i f(a+\nu h)}{i!} \cdot h^i.$$

51. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^m(a)$. Ekkor

$\exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0 : f(a+h) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{|i|=k} \dfrac{\delta^i f(a)}{i!} \cdot h^i + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m \quad (\forall\, h \in K(a))$.

52. Adja meg a kvadratikus alak definícóját!

Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. Ekkor $Q(h) = \langle \boldsymbol{A} \cdot h, h\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}h_jh_i$ függvényt kvadratikus alaknak nevezzük.

53. Mit jelent az, hogy egy kvadratikus alak pozitív(negatív definit)?

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $\boldsymbol{A}$ Q kvadratikus alakja pozitív (negatív) definit , ha

$$Q(h) > 0 \quad (Q(h) < 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

54. Mit jelent az, hogy egy kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit?

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $\boldsymbol{A}$ Q kvadratikus alakja pozitív (negatív) szemidefinit , ha

$$Q(h) \geq 0 \quad (Q(h) \leq 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

55. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak pozitív definit legyen? (Sylvester-kritérium)

Legyen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}, & \dots & , a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus, és legyen $\Delta_i := \det \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}, & \dots & , a_{i,i} \end{pmatrix}$.

Ekkor $\boldsymbol{A}$ pozitív definit $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad i = 1, \dots, n.$

56. Milyen szükséges és elégseges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak negatív definit legyen? (Sylvester-kritérium)

Legyen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}, & \dots & , a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus, és legyen $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}, & \dots & , a_{i,i} \end{pmatrix}$.

Ekkor $\boldsymbol{A}$ negatiív definit $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \dots$.

57. Milyen egyenlőtlenség biztosítja, hogy egy kvadratikus alak pozitív legyen?

Q pozitív definit $\Leftrightarrow \exists\, m > 0 : Q(h) \geq m \cdot \|h\|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n).$

58. Milyen egyenlőtlenség biztosítja, hogy egy kvadratikus alak negatív legyen?

Q negatív definit $\Leftrightarrow \exists\, M < 0 : Q(h) \leq M \cdot \|h\|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n).$

59. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D(a)$, f-nek lokális szélsőértéke van a-ban. Ekkor $f'(a) = 0$.

60. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) definit, akkor f-nek $\exists$ lokális minimuma (maximuma) a-ban.

61. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű szükséges feltételt!

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. Ha f-nek lokális minimuma (maximuma) van a-ban, akkor $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) szemidefinit.

62. Fogalmazza meg a paraméteres integrál tételét!

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt, és $f \colon U \times I \to \mathbb{R}$ ($f \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$) folytonos. Ekkor

i, φ folytonos U-n.

ii, Ha $\exists\, \delta_i f$, és folytonos U-n, akkor $\exists\, \delta_i \varphi$ és folytonos U-n a és $\delta_i \varphi(x) = \int\limits_a^b \delta_i f(x, t) dt$ $(x \in U)$.

63. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

$f \colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, I korlátos és zárt intervallum. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \inf_J f \cdot \mu(J)$$

az alsó közelítő összeg, ahol $\tau \in \mathcal{F}(I)$ és $\mu(I) = (b^1 - a^1) \dots (b^n - a^n)$.

64. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

$f \colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, I korlátos és zárt intervallum. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \sup_J f \cdot \mu(J)$$

a felső közelítő összeg, ahol $\tau \in \mathcal{F}(I)$ és $\mu(I) = (b^1 - a^1) \dots (b^n - a^n)$.

65. Milyen viszony van az alsó és felső közelítő összegek között?

$\tau, \sigma \in \mathcal{F}(I)$, akkor $s(f, \tau) \leq S(f, \sigma)$.

66. Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

$I_* f := \sup\limits_{\tau \in \mathcal{F}(I)} s(f, \tau)$ az alsó Darboux-féle integrál.

67. Mi a Darboux-féle felső integrál definíciója?

$I^*f := \inf_{\tau\in\mathcal{F}(I)} S(f,\tau)$ az felső Darboux-féle integrál.

68. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

$f\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható ($f \in R(I)$), ha $I_*f = I^*f$.

Jele: $I_*f = \int\limits_I f$.

69. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?

$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, $f, g \in R(I)$. Ekkor

$$f + g \in R(I) \text{ és } \int\limits_I f + g = \int\limits_I f + \int\limits_I g.$$

70. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, $f, g \in R(I)$. Ekkor

$$fg \in R(I).$$

71. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, $f, g \in R(I)$. Ekkor ha

$$|g(x)| \geq m > 0 \;\forall\, x \in I\text{-re, akkor } \frac{f}{g} \in R(I).$$

72. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

73. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

74. Mi az integrálszámítás középértéktétele?

75. Fogalmazza meg a szukcesszív integrálásról szóló tételt!

76. Mi a normáltartomány definíciója?

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, $\varphi, \psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos,
$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$-re.

A $H = \{(x, y)\colon a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ halmazt normáltartománynak nevezzük.

77. A normáltartományon való integrálás szabálya.)

$H \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány, $f\colon H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor

$$\int\limits_H f = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \Big) dx.$$

78. Mondja ki az integráltranszformációról tanult tételt!

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazok, U nyílt, $\varphi\colon U \to V$ folytonosan differenciálható bijekció, és $\det \varphi' \neq 0$ U-n. $f\colon V \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|.$$