ANALÍZIS III. ELŐADÁS JEGYZET

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2014. május 15.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Előadás

Két pont távolsága

Értelmezése: Legyen $= x, y \in \mathbb{R}^2$.

$$\varrho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \quad (x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2)).$$

Tulajdonságai:

1. $\varrho(x,y) \geq 0 \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^2)$,
2. $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^2)$,
4. $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \quad (\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^2)$.

Metrikus távolság

1.1 Definíció. Legyen $M \neq \emptyset$. Az (M, ϱ) párt metrikus térnek nevezzük, ha $\varrho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ és

1. $\varrho(x,y) \geq 0 \quad (\forall\, x, y \in M)$,
2. $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \quad (\forall\, x, y \in M)$,
4. $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \quad (\forall\, x, y, z \in M)$.

Ahol ϱ a metrika, $\varrho(x,y)$ az x és y távolsága.

1.2 Definíció. $\varrho(x,y) := \varrho_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ az euklédeszi metrika, ahol

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Tétel. *$(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ metrikus tér, ahol $\varrho_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.*

1.4 Lemma (Cauchy–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség). *$a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \ldots n$. Ekkor*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Egyenlőség $\Leftrightarrow b_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots n$ *vagy* $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : a_i = \lambda b_i \quad \forall i = 1, \ldots n.$

2. Előadás

Normált tér

$(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$ metrikus térben a távolság mellett léteznek műveletek: $+, \lambda\cdot$ és létezik hossz. Ha $x = (x_1, x_2)$, akkor $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
$\|x\|_2$ Tulajdonságai:

1. $\|x\|_2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^2)$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $\|\lambda x\|_2 \leq |\lambda| \cdot \|x\|_2 \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2),$
4. $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^2).$

2.1 Definíció. $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, ha

1. X lineáris vektortér $\mathbb{R}$ felett,
2. $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ és
   - i, $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in X),$
   - ii, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
   - iii, $|\lambda x| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}),$
   - iv, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in X).$

2.2 Tétel. *Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor (X, ϱ) metrikus tér, ahol $\varrho(x, y) := \|x - y\|$.*

2.3 Megjegyzés. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ normált tér $\Rightarrow \varrho_2(x, y) = \|x - y\|_2$.

2.4 Állítás. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *normált tér.*

Környezetek

2.5 Definíció. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < r\}$ az a r-sugarú környezete vagy az a közepű r-sugarú nyílt gömb.

Korlátos halmaz

2.6 Definíció. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, ha $r > 0$, hogy $H \subset K_r(0) \quad (0 \in \mathbb{R}^n)$.

Konvergencia

2.7 Definíció. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér, $(a_k) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ vektorsorozat konvergens, ha $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geq k_0 : \|a_k - \alpha\|_2 < \varepsilon$.
Jelölés: $\alpha = \lim a_k$.

2.8 Definíció. Ha (a_k) nem konvergens, akkor divergens.

2.9 Tétel. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *normált tér, $(a_k) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor a következő tulajdonságok ekvivalensek:*

1. (a_k) *konvergens,*
2. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \geq k_0 : a_k \in K_\varepsilon(\alpha)$*,*
3. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n\ \lim \|a_k - \alpha\|_2 = 0$*.*

2.10 Tétel. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *norrmált tér,* $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$*. Ekkor*

1. *Ha* (a_k) *konvergens és* $\lim a_k = \alpha$*, akkor*
   - *i,* $\exists!\, \alpha$*,*
   - *ii,* (a_k) *korlátos,*
   - *iii,* $\forall\, \nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *indexsorozatra* $\lim a_{\nu(k)} = \alpha$*.*
2. $\nu_1, \nu_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *indexsorozat. Ha* $\lim a_{\nu_1(k)} \neq \lim a_{\nu_2(k)}$*, akkor* (a_k) *divergens.*

2.11 Tétel (Műveletek). $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *normált tér,* $(a_k), (b_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *sorozatok konvergensek,* $\alpha = \lim a_k$*,* $\beta = \lim b_k$*. Ekkor*

1. $(a_k + b_k)$ *is konvergens, és* $\lim(a_k + b_k) = \alpha + \beta$*,*
2. (λa_k) *is konvergens, és* $\lim(\lambda a_k) = \lambda\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R})$*.*

3. Előadás

3.1 Tétel (Sorozatok és koordináta sorozatok konvergenciájára).

$$(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n,\ a_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha, \quad \alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \quad (\forall\, i = 1, \ldots n).$$

Cauchy-sorozatok

3.2 Definíció. $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Cauchy sorozat, ha $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k_0, \forall\, k, l \geq k_0 : \|a_k - a_l\| < \varepsilon$.

3.3 Tétel. $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *konvergens* $\Leftrightarrow$ *Cauchy sorozat.*

3.4 Megjegyzés. Azt is mondhatjuk, hogy $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ Banach tér, vagy teljes normált tér.

Topológiai alapfogalmak

3.5 Definíció. $A \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ az A torlódási pontja, ha $\forall\, K(a) : K(a) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$. Jelölés: A' a torlódási pontok halmaza.

3.6 Tétel. $a \in A' \Leftrightarrow \forall\, K(a) : K(a) \cap A$ *végtelen halmaz*
$a \in A' \Leftrightarrow \exists\, (a_k)\colon \mathbb{N} \to A$ *injektív sorozat:* $\lim a_k = a$*.*

3.7 Definíció.

1. $a \in \mathbb{R}^n$ belső pontja $A \subset \mathbb{R}^n$-nek, ha $\exists\, K(a) \subset A$,
2. A nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont,
3. A zárt halmaz, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt,
4. $\bar{A} = A \cup A'$ az A lezártja.

3.8 Tétel (zárt halmazok jellemzése). $A \subset \mathbb{R}^n$ *zárt* $\Leftrightarrow A' \subset A$*,*
$A \subset \mathbb{R}^n$ *zárt* $\Leftrightarrow \forall\, (a_k)\colon \mathbb{N} \to A$ *konvergens sorozatra* $\lim a_k = \alpha \in A$*.*

4. Előadás

4.1 Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Ha az* $(a_k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *korlátos sorozat, akkor kiválasztható egy* $(a_k) \circ \nu = (a_{\nu_k})$ *konvergens részsorozat.*

4.2 Megjegyzés. $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, azaz szigorúan monoton nő.

Függvények határértéke, folytonossága

4.3 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1), a \in \mathcal{D}'_f$. f-nek $\exists$ határértéke a-ban, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^m, \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\varepsilon(A) \Leftrightarrow$$
$$\exists\, A \in \mathbb{R}^m, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathcal{D}_f, 0 < \|x - a\| < \delta : \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

4.4 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\varepsilon(f(a)) \Leftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \|x - a\| < \delta : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_a f = A,\ f \in C(a)$.

4.5 Állítás. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Ekkor* $\lim\limits_a f = A \Leftrightarrow \tilde{f} \in C(a)$, *ahol*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \mathcal{D}_f,\ x \neq a \\ A & x = a \end{cases}$$

4.6 Tétel (Átviteli elv folytonosságra). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \forall\, (x_k)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \lim x_k = a : \lim f(x_k) = f(a).$$

4.7 Megjegyzés. $n = m = 1$ esetén valós-valós függvény,
$m = 1$ esetén valós értékű függvény,
$n, m > 1$ esetén vektor-vektor függvény.

4.8 Definíció. Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, akkor $f(x) \in \mathbb{R}^m, \forall\, x \in \mathcal{D}_f$. Legyen

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,\ \text{ahol } f_i \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Az f_i függvényeket *koordináta függvény*eknek nevezzük.

4.9 Megjegyzés.

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C(a) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \|x - a\| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

4.10 Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in C(a) \Leftrightarrow f_i \in C(a) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, m)$.

4.11 Tétel. $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, f, g \in C(a)$.

i, $f + g \in C(a),\ \lambda f \in C(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$,

ii, ha $m = 1$*, akkor* $fg \in C(a)$,

iii, ha $m = 1$ *és* $g(a) \neq 0$ *akkor* $\dfrac{f}{g} \in C(a)$.

4.12 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathcal{D}_f$. f folytonos $A - n$, ha $f \in C(a), \forall\, a \in A$.
Jelölés: $f \in C(A)$.

5. Előadás

Korlátos, zárt halmazon értelmezett folytonos függvények

5.1 Tétel. *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény és $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkor $\mathcal{R}_f$ is korlátos és zárt.*

5.2 Tétel (Weierstrass). *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkor $\exists \max f$ és $\exists \min f$.*

5.3 Tétel. *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, f injektív, akkor f^{-1} folytonos.*

Egyenletes folytonosság

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathcal{D}_f$.

$$f \in C(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall y \in \mathcal{D}_f, \|x - y\| < \delta : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

$$\begin{gathered} f \in C, \text{ azaz } f \in C(x) \forall x \in \mathcal{D}_f\text{-re } \Leftrightarrow \\ \forall x \in \mathcal{D}_f, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall y \in \mathcal{D}_f, \|x - y\| < \delta : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \end{gathered}$$

5.4 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény egyenletesen folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}_f, \|x - y\| < \delta : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

5.5 Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

i, *f egyenletesen folytonos $\Rightarrow$ f folytonos,*

ii, *f egyenletesen folytonos $\not\Leftarrow$ f folytonos,*

5.6 Tétel (Heine). *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos, $\mathcal{D}_f$ korlátos és zárt, akkkor f egyenletesen folytonos.*

Banach-féle fixponttétel

5.7 Definíció. $X \subset \mathbb{R}^n, f \colon X \to X, x^* \in X$ fixpontja f-nek, ha $f(x^*) = x^*$.

5.8 Definíció. $X \subset \mathbb{R}^n, f \colon X \to X$ kontrakció, ha

$$\exists\, 0 \le q < 1 : \|f(x) - f(y)\| \le q \cdot \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X).$$

5.9 Állítás. *Ha f kontrakció, akkor f folytonos.*

5.10 Tétel (Banach–féle fixponttétel). *$X \subset \mathbb{R}^n, f \colon X \to X$ kontrakció, X zárt. Ekkor*

i, *f-nek $\exists!$ fixpontja, azaz $\exists!\, x^* \in X : f(x^*) = x^*$,*

ii, *Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, $x_{n+1} := f(x_n)$, akkor $(x_n) \colon \mathbb{N} \to X$ konvergens és $\lim x_n = x^*$,*

iii, $\|x_n - x^*\| \le \dfrac{q^n}{1-q} \cdot \|x_1 - x_0\| \quad (n \in \mathbb{N})$.

6. Előadás

Differenciálszámítás

6.1 Emlékeztető. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

$$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists \text{ és véges } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ határérték.}$$

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, akkor A lineáris leképezés lesz.

6.2 Definíció. $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, ha

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Jelölés: $\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Mátrix reprezentáció

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, azaz $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
Hasonlóan $(f_1, \ldots, f_m)$ kanonikus bázis $\mathbb{R}^m$-ben.
Ekkor

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

$$L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : L(x) = L\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} L(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j).$$

$$L(e_j) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists\, a_{i,j} \in \mathbb{R} : L(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\Big) f_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x) \in \mathbb{R}^m \ i\text{-edik koordinátája: } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j.$$

Legyen $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor $A \cdot x$ i-edik koordinátája: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \Rightarrow L(x) = Ax$, azaz L és A azonosítható.

6.3 Tétel. *Az L lineáris leképezés azonosítható az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixszal.*

6.4 Definíció. $L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operátornormája $\|L\| := \sup\{|L(h)| : \|h\| \le 1\}$.

6.5 Tétel. $|L(h)| \le \|L\| \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n)$.

6.6 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\exists\, L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $L = f'(a)$.

6.7 Tétel (Ekivalens átfogalmazás). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists\, L \in \alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim\limits_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$

$$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(h) \cdot \|h\|.$$

Ekkor $f'(a) = A$.

6.8 Tétel. *A derivált egyértelmű.*

7. Előadás

7.1 Állítás. $n = m = 1$ *esetén* $L \in \alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow L(x) = c \cdot x \quad (c, x \in \mathbb{R})$.

7.2 Tétel (Folytonosság és deriválhatóság). $f \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

i, $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$,

ii, $f \in D(a) \not\Leftarrow f \in C(a)$.

7.3 Tétel. $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), f, g \in D(a)$. *Ekkor*

i, $f + g \in D(a)$ *és* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

ii, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda f) \in D(a)$ *és* $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.

7.4 Tétel. $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g,\ g \in D(a), f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, f \in D(g(a)),\ \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \circ g \in D(a) \text{ és } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

7.5 Megjegyzés. $f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \Rightarrow (f \circ g)'(a) \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

7.6 Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ *koordináta függvény. Ekkor*

$$f \in D(a) \Leftrightarrow f_i \in D(a) \quad (i = 1, \ldots, m) \text{ és } f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}.$$

7.7 Definíció (Parciális derivált). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.
Legyen $F(t) := f(a + t \cdot e_i)$, $t \in K(a) \subset \mathbb{R}$, $\quad (e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0))$. Ekkor f-nek $\exists$ parciális deriváltja az i-edik változó szerint az a pontban, ha $F \in D(a) \quad (F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. A parciális derivált $= F'(a)$.
Jelölés: $\delta_i f(a) = F'(a)$.

8. Előadás

8.1 Tétel. *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, f \in D(a), f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordináta függvények. Ekkor*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \delta_1 f_1(a),\ \delta_2 f_1(a), \ldots, \delta_n f_1(a) \\ \delta_1 f_2(a),\ \delta_2 f_2(a), \ldots, \delta_n f_2(a) \\ \vdots \\ \delta_1 f_m(a),\ \delta_2 f_m(a), \ldots, \delta_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

8.2 Tétel. *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

i, $f \in D(a) \Rightarrow \exists\, \delta_i f(a) \quad (\forall i = 1, \ldots, n)$,

ii, $f \in D(a) \not\Leftarrow \exists\, \delta_i f(a) \quad (\forall i = 1, \ldots, n)$,

8.3 Tétel (Elégséges feltétel derivált létezésére). *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy*

i, $\exists\, \delta_i f(x) \quad \forall\, x \in K(a) \quad (i = 1, \ldots, n)$,

ii, $\delta_i f \in C(a) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$.

Ekkor $f \in D(a)$.

Iránymenti derivált

8.4 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, azaz $\|e\| = 1$. Legyen $F(t) := f(a + t \cdot e)$, ahol $t \in K(a) \subset \mathbb{R}$.
Az f e iránymenti deriváltja létezik az a pontban, ha $F \in D(0) \quad (F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. $F'(0)$ az iránymenti derivált.
Jelölés: $\delta_e f(a)$.

8.5 Megjegyzés. Ha $e = e_i$, akkor $\delta_{e_i} f$ a parciális derivált.

8.6 Tétel. *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

i, $f \in D(a) \Rightarrow \exists\, \delta_e f(a) \quad \forall\, e$ egységvektor esetén, és $\delta_e f(a) = f'(a) \cdot e$,

i, $f \in D(a) \not\Leftarrow \exists\, \delta_e f(a)$.

8.7 Megjegyzés. $f'(a) = (\delta_1 f(a), \ldots, \delta_n f(a)) \qquad (e \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f'(a) \cdot e\ \exists)$.

Lagrange középérték-tétel

8.8 Megjegyzés. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C[a, b], f \in D(a,)$.
Ekor $\exists\, \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Átofgalmazás: Legyen $b = a + h \Rightarrow \xi = a + \nu \cdot h$, ahol $\nu \in (0, 1)$. Ekkor

$$\exists\, \nu(0, 1) : f(a + h) - f(a) = f'(a + \nu \cdot h) \cdot h.$$

8.9 Tétel (Lagrange középérték-tétel). *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, f \in D(K(a))$. Ekkor $\forall\, h \in \mathbb{R}^n$-re, amire $a + h \in K(a)\, \exists\, \nu \in (0, 1) : f(a + h) - f(a) = f'(a + \nu h) \cdot h$.*

Többször deriválható függvények

8.10 Emlékeztető. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor $f \in D^2(a)$, ha

i, $\exists\, K(a)$, hogy $f \in D(K(a))$,

ii, $f' \in D(a)$.

és $f \in D^{s+1}(a)$, ha

i, $\exists\, K(a)$, hogy $f \in D^s(K(a))$,

ii, $f^{(s)} \in D(a)$.

8.11 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor f kétszer deriválható ($f \in D^2(a)$), ha

i, $\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : f \in D(K(a))$,

ii, $\delta_i f \in D(a) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

8.12 Megjegyzés. $i, \Leftrightarrow \exists\, f'(x) = (\delta_i f(x), \ldots, \delta_n f(x)) \quad \forall\, x \in K(a)$.
Tekintsünk f'-re, mint egy függvényre, és írjuk át a következő alakra:

$$f' \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ és } f'(x) = \begin{pmatrix} \delta_1 f(x) \\ \vdots \\ \delta_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$ii, \Leftrightarrow \delta_i f \in D(a) \Leftrightarrow f' \in D(a) \quad$ (régebbi tétel).
Ekkor

$$f''(a) = (f')'(a) = \begin{pmatrix} \delta_1\delta_1 f(a),\ \delta_2\delta_1 f(a), \ldots \delta_n\delta_1 f(a) \\ \delta_1\delta_2 f(a),\ \delta_2\delta_2 f(a), \ldots \delta_n\delta_2 f(a) \\ \vdots \\ \delta_1\delta_n f(a),\ \delta_2\delta_n f(a), \ldots \delta_n\delta_n f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (Hesse mátrix)}$$

9. Előadás

9.1 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor f $(s+1)$-szer deriválható a-ban ha

i, $\exists\, K(a)$, hogy $f \in D^{(s)}(K(a))$,

ii, Minden s-edrendű parciális derivált $\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_s} f \in D(a)$.

Jelölés: $f \in D^{(s+1)}(a)$.

9.2 Tétel (Young). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^2(a)$. *Ekkor*

$$\delta_i\delta_j f(a) = \delta_j\delta_i f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

9.3 Következmény. A Hesse mátrix szimmetrikus.

9.4 Következmény. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^{(s)}(a)$, $\pi : \{i_1, \ldots, i_s\} \to \{i_1, \ldots, i_s\}$ bijekció. Ekkor

$$\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_s} f(a) = \delta_{\pi(i_1)}\ldots\delta_{\pi(i_s)} f(a).$$

Taylor-sor, Taylor-formula

Multiindexes jelölés

$i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Ekkor

- $|i| := i_1 + i_2 + \ldots + i_n$
- $i! := i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_n!$
- $h \in \mathbb{R}^n \quad h^i := h_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{i_n}$
- $\delta^i f := \delta_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta_n^{i_n} f$.

9.5 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^m(a)$. Az f m-edik Taylor-polinomja:

$$T_m f(x) = T_m f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{\delta^i f(a)}{i!} h^i.$$

10. Előadás

10.1 Tétel (Taylor-formula Lagrange maradéktaggal). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in D^{m+1}(K(a))$. *Ekkor* $\forall\, h \in \mathbb{R}^n, a+h \in K(a)$, $\exists\, \nu \in (0,1)$:

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{\delta^i f(a)}{i!} \cdot h^i}_{T_m f(a+h)} + \sum_{|i|=m+1} \frac{\delta^i f(a+\nu h)}{i!} \cdot h^i.$$

10.2 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m-szer folytonosan differenciálható ($f \in C^m(a)$), ha

$$\exists\, K(a), f \in D^m(K(a)) \text{ és } \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_m} \in C(a) \quad \forall\, i_1, \ldots i_m = 1, \ldots, n.$$

10.3 Tétel (Taylor-formula Peano maradéktaggal). $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^m(a)$. *Ekkor*

$$\exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{\delta^i f(a)}{i!} \cdot h^i + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m \quad (\forall\, h \in K(a)).$$

10.4 Megjegyzés. $f(a+h) = T_m f(a+h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m$.

10.5 Következmény. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. EKkor

$$\exists\, \varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) = f(a)\langle f'(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a), h\rangle + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^2.$$

10.6 Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

i, f-nek abszolút maximuma (minimuma) van a-ban, ha

$$f(x) \le f(a) \quad (f(x) \ge f(a)) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,$$

ii, f-nek lokális maximuma (minimuma) van a-ban, ha

$$\exists\, K(a) : f(x) \le f(a) \quad (f(x) \ge f(a)) \quad \forall\, x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f.$$

10.7 Tétel. *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D(a)$, f-nek lokális szélsőértéke van a-ban. Ekkor $f'(a) = 0$.*

10.8 Definíció. Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. Ekkor $Q(h) = \langle \boldsymbol{A}\cdot h, h\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}h_jh_i$ függvényt kvadratikus alaknak nevezzük.

10.9 Definíció. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $\boldsymbol{A}$ Q kvadratikus alakja

i, pozitív definit, ha $Q(h) > 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

ii, negatív definit, ha $Q(h) < 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

iii, pozitív szemidefinit, ha $Q(h) \geq 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$,

iv, negatív szemidefinit, ha $Q(h) \leq 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$,

v, indefinit, ha q felvesz pozitív és negatív értékeket is.

11. Előadás

11.1 Tétel (Sylvester kritérium). *Legyen*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}, & \dots & , a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus, és legyen $\Delta_i := \det \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots & , a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}, & \dots & , a_{i,i} \end{pmatrix}$. *Ekkor*

i, $\boldsymbol{A}$ pozitív definit $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$,

ii, $\boldsymbol{A}$ negatiív definit $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \dots$.

11.2 Megjegyzés. Legyen $\Delta_0 := 1$. Ekkor

i, $\boldsymbol{A}$ pozitív definit $\Leftrightarrow \Delta_i$ jeltartó,

ii, $\boldsymbol{A}$ negatív definit $\Leftrightarrow \Delta_i$ jelváltó,

11.3 Tétel. *Ha $\boldsymbol{A}$ szimmetrikus, akkor*

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : m \cdot \|h\|^2 \leq Q(h) \leq M \cdot \|h\|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

11.4 Tétel. *i, Q pozitív definit $\Leftrightarrow \exists\, m > 0 : Q(h) \geq m \cdot \|h\|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n)$,*

ii, Q negatív definit $\Leftrightarrow \exists\, M < 0 : Q(h) \leq M \cdot \|h\|^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n)$.

11.5 Tétel (Másodrendű elégséges feltétel). *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) definit, akkor f-nek $\exists$ lokális minimuma (maximuma) a-ban.*

11.6 Tétel (Másodrendű szükséges feltétel). *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. Ha f-nek lokális minimuma (maximuma) van a-ban, akkor $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) szemidefinit.*

11.7 Tétel. *$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(a)$. Ha $f''(a)$ indefinit, akkor f-nek $\nexists$ lokális szélsőértéke a-ban.*

Integrálás

Paraméteres integrál

11.8 Definíció. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intetrvallum.
Legyen $f : U \times I \to \mathbb{R}$ ($f \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$) folytonos. Ekkor $\varphi(x) := \int\limits_a^b f(x,t)dt \quad (x \in U)$ függvény az f paraméteres integrálja.

11.9 Megjegyzés. $\varphi(x)$ $\exists$, mert f folytonos.

11.10 Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intetrvallum.*
Legyen $f : U \times I \to \mathbb{R}$ ($f \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$) folytonos. Ekkor

- *i, φ folytonos U-n.*
- *ii, Ha $\exists\, \delta_i f$, és folytonos U-n, akkor $\exists\, \delta_i\varphi$ és folytonos U-n a és $\delta_i\varphi(x) = \int\limits_a^b \delta_i f(x,t)dt$ $(x \in U)$.*

Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények integrálása

11.11 Definíció. Legyen $I^j = [a^j, b^j] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $\quad (j = 1, \ldots, n)$. Ekkor $I := I^1 \times \ldots \times I^n$ n dimenziós zárt intervallum. $\mu(I) := (b^1 - a^1)(b^2 - a^2)\ldots(b^n - a^n)$ az I mértéke.

11.12 Definíció. Legyen $\tau^j = \{[x_0^j, x_1^j], [x_1^j, x_2^j], \ldots, [x_{m_j-1}^j, x_{m_j}^j]\}$ az I^j felosztása. Ekkor $\tau := \tau^1 \times \ldots \times \tau^n$ az I egy felosztása.

12. Előadás

12.1 Definíció. $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos, I korlátos és zárt intervallum. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \inf_J f \cdot \mu(J)$$

az alsó közelítő összeg, ahol $\tau \in \mathcal{F}(I)$ és $\mu(I) = (b^1 - a^1)\ldots(b^n - a^n)$.

12.2 Definíció. $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos, I korlátos és zárt intervallum. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \sup_J f \cdot \mu(J)$$

a felső közelítő összeg, ahol $\tau \in \mathcal{F}(I)$ és $\mu(I) = (b^1 - a^1)\ldots(b^n - a^n)$.

12.3 Definíció. τ finomabb σ-nál ($\tau, \sigma \in \mathcal{F}(I)$), ha τ^i finomabb σ^i-nél $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

12.4 Tétel. *$\tau, \sigma \in \mathcal{F}(I), \tau$ finomabb σ-nál. Ekkor*

- *i, $s(f, \sigma) \leq s(f, \tau)$,*
- *ii $S(F, \sigma) \geq S(f, \tau)$.*

12.5 Tétel. *$\tau, \sigma \in \mathcal{F}(I)$, akkor $s(f, \tau) \leq S(f, \sigma)$.*

12.6 Definíció. $I_* f := \sup\limits_{\tau \in \mathcal{F}(I)} s(f,\tau)$ az alsó Darboux-féle integrál.

12.7 Definíció. $I^* f := \inf\limits_{\tau \in \mathcal{F}(I)} S(f,\tau)$ az felső Darboux-féle integrál.

12.8 Tétel. *$f\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, $I \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt. Ekkor*

$$I_* f \leq I^* f.$$

12.9 Definíció. $f\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható ($f \in R(I)$), ha $I_* f = I^* f$. Jele: $I_* f = \int\limits_I f$.

12.10 Tétel. *$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos, $f, g \in R(I)$. Ekkor*

i, $f + g \in R(I)$ *és* $\displaystyle\int\limits_I f + g = \int\limits_I f + \int\limits_I g$,

ii, $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén* $\lambda f \in R(I)$ *és* $\displaystyle\int\limits_I \lambda f = \lambda \int\limits_I f$,

iii, $fg \in R(I)$,

iv, ha $|g(x)| \geq m > 0\ \forall x \in I$*-re, akkor* $\dfrac{f}{g} \in R(I)$,

v, ha $f \leq g$*, akkor* $\displaystyle\int\limits_I f \leq \int\limits_I g$.

12.11 Tétel (Az integrál kiszámítása). *Legyen $I = I^1 \times I^2 \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $f \in \mathbb{R}(I)$.*
Rögzített $x \in I^1$-re legyen $\varphi_x(y) = f(x,y), \varphi_x\colon I^2 \to \mathbb{R}$. Jelölje $m(x)$ és $M(x)$ a φ_x alsó és felső Darboux-integrálját. Ekkor

$$\int\limits_I f = \int\limits_{I^1} m(x)dx = \int\limits_{I^1} M(x)dx.$$

12.12 Következmény. $I = I^1 \times I^2 \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon I \to \mathbb{R}, f \in R(I)$. Ha $\varphi_x\colon I^2 \to \mathbb{R}$ integrálható $\forall x \in I^1$-re, akkor

$$\int\limits_I f = \int\limits_{I^1} \Big(\int\limits_{I^2} f(x,y)dy \Big) dx.$$

12.13 Definíció. $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos. Ekkor $\exists\, I$ korlátos és zárt intervallum, hogy $H \subset I$. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ és

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in H \\ 0 & x \in I \setminus H \end{cases}$$

Ha $\widetilde{f} \in R(I)$, akkor $f \in R(H)$ és $\displaystyle\int\limits_H f := \int\limits_I \widetilde{f}$.

12.14 Definíció. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$-re.
A $H = \{(x,y) \colon a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ halmazt normáltartománynak nevezzük.

12.15 Tétel. *$H \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány, $f \colon H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor*

$$\int\limits_H f = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

12.16 Tétel (Integráltranszformáció). *$U, V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazok, U nyílt, $\varphi \colon U \to V$ folytonosan differenciálható bijekció, és $\det \varphi' \neq 0$ U-n. $f \colon V \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor*

$$\int\limits_V f = \int\limits_U (f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|.$$