NUMERIKUS MÓDSZEREK I.
BEUGRÓ KÉRDÉSEK

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2014. január 7.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Definiálja a gép számok halmazát (a tanult modellnek megfelelően)! Adja meg a normalizált lebegőpontos szám alakját!

Az $a = \pm m2^k$, ($m = \sum_{i=1}^{t} m_i 2^{-i}$, $m_i \in \{0,1\}, m_1 = 1, t \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$) számot normalizált lebegőpontos számnak nevezzük, ahol m_i mantissza, t a mantissza hossza, k_i karakterisztika. Jelölése: $a = \pm[m_1 \dots m_t | k]$

Gépi számok halmaza:

$$M(t, k^-, k^+) := \left\{ a = \pm m2^k \mid m = \sum_{i=1}^{t} m_i 2^{-i}, m_i \in \{0,1\}, m_1 = 1, k^- \leq k \leq k^+ \right\} \cup \{0\},$$
$$M = M(t, k^-, k^+)$$

2. Írja le a gép számhalmaz nevezetes számait!

A legnagyobb pozitív szám: $M_\infty = +[11 \dots 1 | k^+] = (1 - \frac{1}{2^t})2^{k^+}$

A legkisebb pozitív szám: $\varepsilon_0 = [10 \dots 0 | k^-] = \frac{1}{2} 2^{k^-}$

A számábrázolás relatív pontossága: $\varepsilon_1 = \underbrace{[1 \cdots | 1]}_{\text{1 rákövetkezője}} - \underbrace{[10 \dots 0 \mid 1]}_{1} = \dfrac{1}{2^t} 2^1 = 2^{1-t}$

3. Definálja az input függvény fogalmát, és írja le a hibájára vonatkozó tételt!

Az $\mathrm{fl} \colon \mathbb{R}^x \to M$ függvényt input függvénynek nevezzük, ha

$$\mathrm{fl}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{ha } 0 \leq |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az x-hez közelebbi gépi szám a kerekítés szerint, ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

Tétel: Ha $x \in \mathbb{R}^x$, akkor

$$|x - \mathrm{fl}(x)| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, \quad \text{ha } 0 \leq |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}|x|\varepsilon_1, \quad \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

4. Adja meg a hibaszámítás alapfogalmait: hiba, abszolút-, relatív hiba és korlátjaik!

Legyen A a pontos érték, a pedig közelítő érték. Ekkor

Hiba: $\Delta a = A - a$

Abszolút hiba: $|\Delta a| = |A - a|$

Egy abszolút hibakorlát: $\Delta_a \geq |\Delta a|$

Relatív hiba: $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$

Egy relatív hibakorlát: $\delta_a \geq |\delta a|$

5. Írja le az alapműveletek abszolút hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

- $\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$
- $\Delta_{ab} = |a|\Delta_b + |b|\Delta_a$
- $\Delta_{\frac{a}{b}} = \dfrac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{b^2} = \dfrac{|a|}{|b|}\left(\dfrac{\Delta_a}{|a|} + \dfrac{\Delta_b}{|b|}\right)$

6. Írja le az alapműveletek relatív hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

- $\delta_{a \pm b} = \dfrac{|a|\delta_a + |b|\delta_b}{|a \pm b|}$
- $\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$
- $\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$

7. Írja le a függvényérték abszolút hibakorlátjára vonatkozó összefüggést!
$f \in C^1(k(a))$, $k(a) := [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, ekkor $\Delta_{f(a)} = M_1 \Delta_a$, ahol
$M_1 := \max\{|f'(x)| : x \in k(a)\}$

8. Írja le a függvényérték abszolút- és relatív hibakorlátjára vonatkozó összefüggést (a függvényről kétszer folytonosan deriválhatóságot feltételezve)!
$f \in C^2(k(a))$, ekkor $\Delta_{f(a)} = |f'(a)|\Delta_a + \frac{M_2}{2}\Delta_a^2$, ahol
$M_2 := \max\{|f''(x)| : x \in k(a)\}$

9. Definiálja az f függvény „a" pontbeli kondíciószámát!
A $c(f,a) = \dfrac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$ mennyiséget az f függvény a-beli kondiciószámának nevezzük.

10. Mennyi a Gauss-elimináció illetve a visszahelyettesítés műveletigénye? $(x + \mathcal{O}(n^y))$
Gauss elimináció műveletigénye:
$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Visszahelyettesítés műveletigénye:

$n^2 + \mathcal{O}(n)$, ahol $\mathcal{O}(n) = 0$, így a műveletigény n^2

11. Írja fel az L_k mátrixot, melyet $A^{(k-1)}$-re alkalmazva a Gauss-elimináció egy lépését kapjuk!
A Gauss-elimináció k. lépése felírható $\mathbf{L_k A^{(k-1)}} = \mathbf{A^{(k)}}$ alakban, ahol $\mathbf{L_k} \in \mathcal{L}^{(1)}$ és

$$\mathbf{L_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} - \mathbf{l_k e_k^\top}, \text{ ahol } \mathbf{l_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{bmatrix}, \text{ és } l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

12. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére! (Gauss-eliminációval)
Ha a Gauss-elimináció elvégezhető sor és oszlop csere nélkül, akkor $\exists \mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú felbontás, ahol $\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{(1)}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}$.

13. Adjon elégséges feltételt az LU-felbontás létezésére és egyértelműségére! (Gauss-elimináció nélkül)
Ha $D_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^k) \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n-1)$, akkor az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás létezik, és $u_{kk} \neq 0 \quad k = 1, \dots, n-1)$. Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

14. Mennyi az LU-felbontás, illetve egy háromszög mátrixú LER megoldásának műveletigénye? $(x + \mathcal{O}(n^y))$
$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

15. Mikor nevezzük A-t szimmetrikus és pozitív definit mátrixnak?
Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus mátrix, ha $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$, és
pozitív definit, ha $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} > 0$ $(\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$

16. Mikor nevezzük A-t a soraira (oszlopaira) nézve szigorúan diagonálisan dominánsnak?
$\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i\text{-re.}$$

az oszlopaira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}| \quad \forall i\text{-re.}$$

17. Definiálja A fél sávszélességét!
Az $\mathbf{A}$ fél sávszélessége $s \in \mathbb{N}$, ha
$\forall\, i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0$, és
$\exists\, k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0$.

18. Definiálja A profilját!
Az $\mathbf{A}$ profilja a k_i és l_j számok összessége
$a_{ij} = 0$ $(j = 1 \ldots k_i)$ és $a_{i,k_i+1} \neq 0$, és
$a_{ij} = 0$ $(j = 1 \ldots l_j)$ és $a_{l_j+1,j} \neq 0$.

19. Definiálja az A mátrix $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementerét!
Ha $\mathbf{A_{11}} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ és invertálható, akkor az $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}] = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}} \cdot \mathbf{A_{11}^{-1}} \cdot \mathbf{A_{12}}$ mátrix az $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementere.

20. Mondja ki a a Gauss-elimináció (legalább) 4 tulajdonságának megmaradási tételét!
- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szimmetrikus.
- Ha $\mathbf{A}$ pozitív definit, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is pozitív definit.
- Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szigorúan diagonálisan domináns.
- Ha $\mathbf{A}$ fél szávszélessége s, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ fél sávszélessége is legalább s.
- $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ profilja az $\mathbf{A}$ profiljához képest nem csökkenhet.
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow \det([\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]) \neq 0$.

21. Definiálja a Cholesky-felbontást!
$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$, ahol $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{A}$ szimmetrikus és $l_{ii} > 0$ $\forall i$-re.

22. Milyen tételt tanult a Cholesky-felbontásról?
Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív definit, akkor $\exists!\, \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ felbontás.

23. Mennyi a Cholesky-felbontás műveletigénye? $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mathcal{O}(n^y)})$
$\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

24. Milyen tételt tanult a QR-felbontásról?
Ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor $\exists\, \mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontás. Ha még feltesszük, hogy az $r_{ii} > 0$ $\forall\, i$-re, akkor egyértelmű is.

25. Mennyi a QR-felbontás műveletigénye?
$2n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

26. Definiálja a Householder mátrixot!
A $\mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$) mátrix a $\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó Householder mátrix.

27. Írja le a Householder-transzformáció 4 tanult tulajdonságát!
- $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$ szimmetrikus ($\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$).
- $\mathbf{H}$ ortogonális ($\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^\top = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$).
- $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.
- $\forall\, \mathbf{y} \perp \mathbf{v}: \ \mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{y} = \mathbf{y}$.

28. Adja meg azt a Householder mátrixot, melyre az azonos hosszúságú $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ vektorok esetén $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$!
Legyen $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2$, ekkor
$\mathbf{v} := \pm\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_2}$-re $\quad \mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

29. Írja le a vektornorma definiáló tulajdonságait!
A $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt vektornormának nevezzük, ha
- $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!
A $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvényt mátrixnormának nevezzük, ha
- $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
- $\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

31. Írja le az indukált mátrixnormáról tanult tételt!
Legyen $\|\cdot\|_v$ tetszőleges vektornorma. Ekkor az $\|\mathbf{A}\| := \sup\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \dfrac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$ mennyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?
A $\|\cdot\|$ mátrixnorma és a $\|\cdot\|_v$ vektornorma illeszkedik, ha $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

33. Írja le az $\mathbf{1, 2, \infty}$ és Frobenius mátrixnormát!
1-ES MÁTRIXNORMA:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2-ES MÁTRIXNORMA:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\varrho(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})} = (\max(\lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})))^{\frac{1}{2}}.$$

∞ MÁTRIXNORMA:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Frobenius mátrixnorma:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

34. Mit nevezünk egy mátrix spektrálsugarának?
A $\varrho(\mathbf{B}) = \max |\lambda_i(\mathbf{B})|$ mennyiség a $\mathbf{B}$ mátrix spektrálsugara.

35. Definiálja a kondíciószámot mátrixok esetén! Mikor értelmezhető?
A $\text{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \cdot \|(\mathbf{A}^{-1})\|$ mennyiséget az $\mathbf{A}$ kondíciós számának nevezzük. Akkor értelmezhető, ha $\mathbf{A}$-nak létezik inverze.

36. Írja le a LER jobboldalának változásakor érvényes pertubációs tételt!
Tfh. $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}$ invertálható. Ekkor illeszkedő normákra:
$$\frac{1}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

37. Írja le a LER mátrixának változásakor érvényes pertubációs tételt!
Tfh $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$ és $\|\cdot\|$ indukált nomra. Ekkor:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

38. Írja le a kondíciószám (legalább) 4 tulajdonságát!
- $c \neq 0 (\in \mathbb{R})$ esetén $\text{cond}(c\mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A})$.
- Indukált mátrixnormában: $\text{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$.
- Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, akkor $\text{cond}_2(\mathbf{Q}) = 1$.
- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}$.

39. Írja le a kontrakció fogalmát $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény esetén!
A φ függvény kontrakció, ha $\exists\, q : 0 \leq q < 1$, $\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| < q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

40. Írja le a Banach-féle fixponttételt $\mathbb{R}^n$-re!
Ha φ kontrakció $\mathbb{R}^n$-en, akkor
1. $\exists! \mathbf{x}^*$ fixpont,
2. $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^{(k+1)} := \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$ iterációs sorozat konvergens és $\lim(\mathbf{x}^k) = \mathbf{x}^*$,
3. Hibabecslés: $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq q^k \cdot \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|$, illetve
   $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$.

41. Adjon elégséges feltételt az $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}k + \mathbf{c}$ alakú iterációk konvergenciájára!
Ha $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor az $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ iteráció $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$-re konvergál az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásához.

42. Írja le az indukált normák és spektrálsugár kapcsolatáról tanult lemmát!
$\varrho(\mathbf{B}) = \inf\{\|\mathbf{B}\| \colon \|\cdot\| \text{indukált norma}\}$
$(\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \|\cdot\|$ indukált norma: $\|\mathbf{B}\| \leq \varrho(\mathbf{B}) + \varepsilon)$.

43. Adjon szükséges és elégséges feltételt az $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}k + \mathbf{c}$ alakú iterációk konvergenciájára!

$\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra az $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$
$\Updownarrow$
$\varrho(\mathbf{B}) < 1$ iteráció konvergál az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldáshoz.

44. Írja le a Jacobi- és a csillapított Jacobi iterációt

JACOBI ITERÁCIÓ

$$\underset{(i=1\ldots n)}{x_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

CSILLAPÍTOTT JACOBI ITERÁCIÓ

$$\underset{(i=1\ldots n)}{x_i^{(k+1)}} = (1-\omega) x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

45. Adjon elégséges feltételt a Jacobi iteráció és a csillapított Jacobi iteráció konvergenciájára!

JACOBI ITERÁCIÓ

Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor $\|\mathbf{B_j}\|_\infty < 1$ (azaz $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra konvergens a $J(1)$).

CSILLAPÍTOTT JACOBI ITERÁCIÓ

Ha $J(1)$ konvergens $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra, akkor $0 < \omega < 1$-re a $J(\omega)$ is konvergens.

46. Írja le a Gauss-Seidel-iterációt(a koordinátás alakot is!)!

$$\begin{aligned}
(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x} &= -\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{U}\mathbf{x} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \\
\rightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} &= -\underbrace{(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{U}}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{c}_S}
\end{aligned}$$

KOORDINÁTÁS ALAK

$$\underset{(i=1\ldots n)}{x_i^{(k+1)}} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

47. Írja le a Gauss-Seidel relaxációs módszert(a koordinátás alakot is)!

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1} \left((1-\omega)\cdot\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}\right) \mathbf{x}^{(k)} + \omega \cdot (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\underset{(i=1,\ldots,n)}{x_i^{(k+1)}} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) + (1-\omega) \cdot x_i^{(k)}.$$

48. Milyen szükséges és elégséges feltételt tanult a Gauss-Seidel relaxáció konvergenciájáról?

Ha $S(\omega)$ konvergens $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra, akkor az $\omega \in (0,2)$.
Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív definit, $\omega \in (0,2)$, akkor az $S(\omega)$ konvergens $\forall \mathbf{x}^{(0)}$-ra.

49. Szigorúan diagonálisan domináns mátrix esetén mit tud mondani a Jacobi- és a Gauss-Seidel-iteráció konvergenciájáról?

Ha $\mathbf{A}$ tridiagonálisan domináns a soraira, akkor $\varrho(B_s) = \varrho(B_J)^2$ azaz $S(1)$ és $J(1)$ is konvergens.

50. Milyen tételt tanult szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális mátrixok esetén a $\mathbf{J(1), S(1), S(}w\mathbf{)}$ módszerekről?

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális, akkor $J(1), S(1)$ és $S(\omega)$ is konvergens $\omega \in (0,2)$-re, és

$\omega_0 = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\varrho(B_J)^2}}$ az optimális $S(\omega)$-ra, és

ha $\varrho(B_J) = 0$, akkor $\varrho(B_{S(\omega)}) = \varrho(B_S) = 0$,

ha $\varrho(B_J) \neq 0$, akkor $\varrho(B_{S(\omega)}) = \omega_0 - 1 < \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2$.

51. Vezesse le a Richardson-típusú iterációk alakját!

$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - p\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + p\mathbf{b}$

52. Milyen tételt tanult a Richardson-típusú iterációkról?

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit és a sajátértékeire: $0 < m = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = M$, akkor $p \in (0, \frac{2}{M})$-re a $R(p)$ konvergens $\forall\, \mathbf{x}^{(0)}$-ra. $p_0 = \frac{1}{(M+m)}$ az optimális p és ekkor $\varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{(M-m)}{(M+m)}$.

53. Definiálja a J pozíció halmazra illeszkedő részleges LU-felbontást!

Legyen J a mátrix elemek pozícióinak olyan halmaza, mely nem tartalmazza a főátlót. Az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra vonatkozó ILU-felbontásán olyan felbontást értünk, melyre $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakja a szokásos, és

$l_{ij} = 0$ és $u_{ij} = 0,$ ha $(i,j) \in J$, $(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{LU})_{ij} \quad (i,j) \notin J$

54. Írja le az ILU-felbontás algoritmusát ($\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ előállításának felírása)!

$\tilde{\mathbf{A}}_1 := \mathbf{A}$ *k. lépésben:*

(1.) Szétbontás: $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k$ alakú, ahol

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_k)_{ik} &= 0 \quad (i,k) \in J \\
(\mathbf{P}_k)_{kj} &= 0 \quad (k,j) \in J \\
(\mathbf{Q}_k)_{ik} &= -\tilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i,k) \in J \\
(\mathbf{Q}_k)_{kj} &= -\tilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k,j) \in J
\end{aligned}$$

(2.) Elimináció:

$\tilde{\mathbf{A}}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k$

$\mathbf{A} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ alakot állítunk elő.

Az ILU felbontással kapott részmátrixokból:

$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}}_n$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \ldots \mathbf{L}_{n-1}^{-1}$ és $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \cdots + \mathbf{Q}_{k-1}$, ekkor $\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q} \qquad (\mathbf{P} = \mathbf{LU})$.

55. Adjon elégséges feltételt az ILU-felbontás létezésére és egyértelműségére!

Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor az ILU-felbontás elvégezhető és egyértelmű.

56. Vezesse le az ILU-algoritmust! A reziduum vektor bevezetésével írja fel a gyakorlatban használt alakot is!

$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$

$k = 0, 1 \ldots$ leállásig

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Px}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &:= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &:= \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{As}^{(k)}
\end{aligned}
$$

57. Írja le a Bolzano-tételt!

$f \in C[a,b],\ f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, x^* \in (a,b) : f(x^*) = 0.$

58. Írja le az intervallum-felezés algoritmusát és hibabecslését!

ALGORITMUS

$x_0 := a, y_0 := b$

k. lépésben:

$s_k := \dfrac{x_k + y_k}{2}$

$f(s_k)f(x_k) < 0 \Rightarrow x_{k+1} := x_k,\ y_{k+1} := s_k$

$f(s_k)f(x_k) > 0 \Rightarrow x_{k+1} := s_k,\ y_{k+1} := y_k$

$f(s_k)f(x_k) = 0 \Rightarrow s_k := \dfrac{x_k + y_k}{2}$

HIBABECSLÉS

$$
\left.\begin{array}{l} |x_k - x^*| \\ |y_k - x^*| \end{array}\right\} \le y_k - x_k \le \frac{b-a}{2^k}
$$

$|s_k - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^{k+1}}.$

59. Írja le a Brouwer-féle fixponttételt!

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és $\varphi \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, x^* \in [a,b] : x^* = \varphi(x^*)$

60. Írja le a fixponttételt az $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ intervallumra!

61. Adjon meg elégséges feltételt a kontrakcióra!

62. Definiálja a konvergencia rend fogalmát!

63. Írja le az $\boldsymbol{m}$-ed rendű konvergenciára vonatkozó tételt!

64. Vezesse le a Newton-módszer képletét!